

6ª EDIÇÃO 2016

# Olimpíadas do Conhecimento

Universidade Fernando Pessoa

COM UMA NOVA MODALIDADE A CONCURSO

## PROVA NACIONAL ESCRITA DE MATEMÁTICA

Equipa Responsável Pela Elaboração e Correção da Prova:

Prof. Doutor Sérgio Barreira

Prof.ª Doutora Conceição Manso

Prof.ª Doutora Catarina Lemos

Duração da Prova: 120 minutos. Tolerância: 30 minutos

Cotação: 200 PONTOS

Escola de Proveniência dos Concorrentes: .....

Nome para a Equipa (facultativo): .....

Nome dos Concorrentes:

N.º do Documento de  
Identificação

1. .... N.º .....

2. .... N.º .....

3. .... N.º .....



6ª EDIÇÃO 2016

# Olimpíadas do Conhecimento

Universidade Fernando Pessoa

COM UMA NOVA MODALIDADE A CONCURSO

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

Deve usar uma máquina de calcular, **quando permitido**.

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corretor nas folhas da prova.

**Grupo I**

- É constituído por 15 questões de escolha múltipla.
- Não é permitida utilização de máquina de calcular excepto quando indicado
- Cada questão é seguida de três ou quatro respostas possíveis — A a C ou A a D —, mas uma e só uma entre elas é a resposta correta.
- Indique claramente, na folha de respostas, o número da questão e a letra que identifica a única opção escolhida.
- Não apresente cálculos, nem justificações.

**COTAÇÕES**

1. Cinco pessoas que estão de pé pretendem ocupar cinco cadeiras. Qual o número total de maneiras diferentes de ocupá-las?
- (A) 60      (B) 110      (C) 120      (D) 130      5
2. Um código para leitura ótica é constituído por 6 barras, brancas ou pretas. Nenhum código tem barras de uma só cor. Quantos desses códigos, distintos entre si, podem ser formados?
- (A) 15      (B) 60      (C) 62      (D) 64      5
3. Sabendo que o segredo de um cofre é uma sequência de quatro algarismos distintos e que o primeiro é igual ao triplo do segundo, o maior número de tentativas diferentes que poderá ser necessário fazer para conseguir abrir o cofre é de:
- (A) 56      (B) 84      (C) 168      (D) 253      5
4. No início dos anos 1980, os hemofílicos recebiam concentrados de fator de coagulação derivados do sangue humano. Os concentrados eram reunidos a partir do sangue de 1000 dadores por lote. Se a prevalência de HIV no sangue dos dadores nessa altura era de 1 em 3000,
- 4a) qual era a probabilidade de nenhum dos dadores de um lote ter HIV? Podem usar calculadora
- (A) 0,239      (B) 1,000      (C) 0,0003      (D) 0,716      5

**4b)** qual era a probabilidade de um hemofílico contrair HIV através de uma única infusão de fatores coagulantes? **Podem usar calculadora**

- (A) 0,001      (B) 0,284      (C) 0,239      (D) 0,523

5

**5.** Suponha que a probabilidade de um indivíduo sobreviver 5 anos após lhe ser diagnosticado um determinado tipo de cancro é de 0,6 (60%) e a probabilidade de sobreviver 10 anos é de 0,2 (20%). Se esse indivíduo sobreviver 5 anos, qual a probabilidade de sobreviver 10 anos? **Podem usar calculadora**

- (A) 0,333      (B) 0,600      (C) 0,133      (D) 0,267

5

**6.** Uma companhia desenvolveu um teste de diagnóstico para detetar resistência a antibióticos em pacientes com acne. Um teste positivo significa que é menos provável que o paciente tenha uma resposta adequada a um determinado antibiótico, enquanto que um teste negativo indica que é mais provável que a resposta seja apropriada. Para determinar a utilidade clínica do teste, os investigadores aplicaram o teste a 59 pacientes que se sabia que não respondiam ao antibiótico oxitetraciclina e 72 pacientes que se sabiam que respondiam adequadamente. Os resultados foram os seguintes:

	Resistem à oxitetraciclina	Respondem à oxitetraciclina
Teste positivo	10	9
Teste negativo	49	63

**6a)** Qual a especificidade do teste (probabilidade de um paciente ter um resultado negativo sabendo que responde à oxitetraciclina)? **Podem usar calculadora**

- (A) 0,875      (B) 0,125      (C) 0,831      (D) 0,562

5

**6b)** A companhia defende que a prevalência da resistência à oxitetraciclina nos pacientes com acne na população em geral é de 40%. Determine o valor preditivo positivo utilizando esta informação. (Valor preditivo positivo é a probabilidade de ser resistente à oxitetraciclina tendo um resultado positivo no teste). **Podem usar calculadora**

- (A) 0,905      (B) 0,526      (C) 0,169      (D) 0,475

5

7. Uma receita médica requer que o doente tome diariamente comprimidos que contenham 12 mg de vitamina B12 e 12 mg de vitamina E. Uma farmácia tem em stock três compostos que podem ser utilizados para produzir os comprimidos, os compostos A, B e C. O composto A contém 20 % de vitamina B12 e 30 % de vitamina E; o composto B contém 40 % de vitamina B12 e 20 % de vitamina E, o composto C contém 30 % de vitamina B12 e 40 % de vitamina E.

Qual das seguintes combinações não pode ser utilizada para preparar os comprimidos?

- (A) 22,5 mg de A + 13,7 mg de B + 10 mg de C  
 (B) 7,5 mg de A + 11,2 mg de B + 30 mg de C  
 (C) 9,5 mg de A + 9,7 mg de B + 27,5 mg de C  
 (D) 10 mg de B + 40 mg de C

10

8. A versão irredutível da expressão algébrica seguinte

$$(-m^2 + 2m + 3) \cdot \frac{\frac{3}{m^3 - 3m^2 - m + 3} - \frac{1}{m^3 + 1}}{1 - \frac{1 - 2m - m^2}{m^2 - m + 1}}$$

é:

- (A)  $\frac{1}{1-m}$       (B)  $\frac{1}{3}$       (C)  $\frac{m-1}{2}$       (D)  $m+1$

10

9. Qual é o conjunto solução da inequação  $\log_{\frac{1}{x}}(2x) > 3 - \log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{2-x}{x^3}\right)$ ?

- (A)  $]0, 1[ \cup \left] \frac{3}{2}, \frac{3+\sqrt{2}}{2} \right[$       (B)  $]0, \frac{2-\sqrt{2}}{2} [ \cup ]1, \frac{2+\sqrt{2}}{2} [$   
 (C)  $]0, \frac{2-\sqrt{2}}{2} [ \cup ]1, \frac{3}{2} [$       (D)  $]0, \frac{1-\sqrt{2}}{2} [ \cup ]1, \sqrt{2} [$

10

10. A condição

$$\cos \sqrt{2}\alpha + \frac{1}{\cos \sqrt{2}\alpha} = 2$$

não é satisfeita quando:

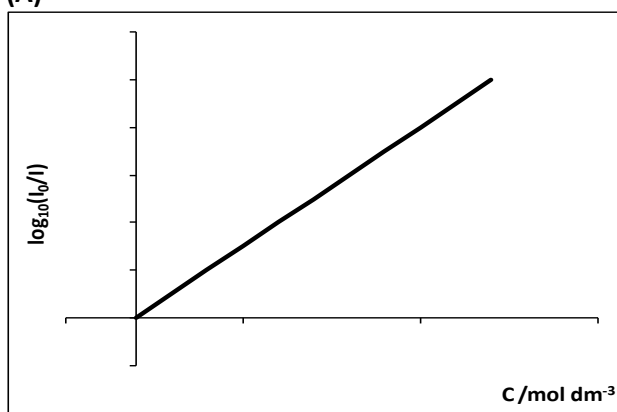
- (A)  $\alpha = \sqrt{18}\pi$       (B)  $\alpha = \sqrt{8}\pi$       (C)  $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$       (D)  $\alpha = \sqrt{2}\pi$

5

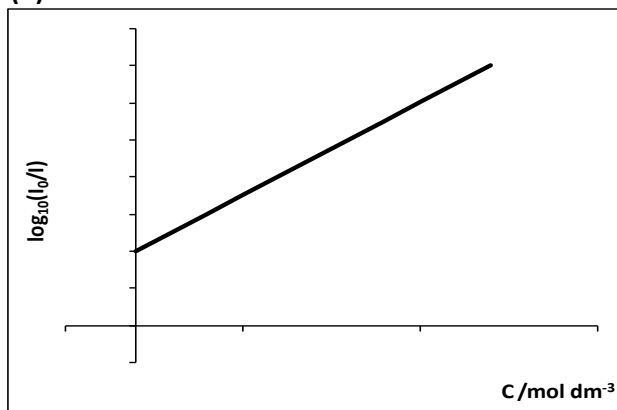
11. O gráfico da equação  $\frac{I}{I_0} = 10^{-\varepsilon bc}$ , onde  $I_0$ ,  $\varepsilon$  e  $b$  são constantes positivas e  $I_0 \geq I$  é:

5

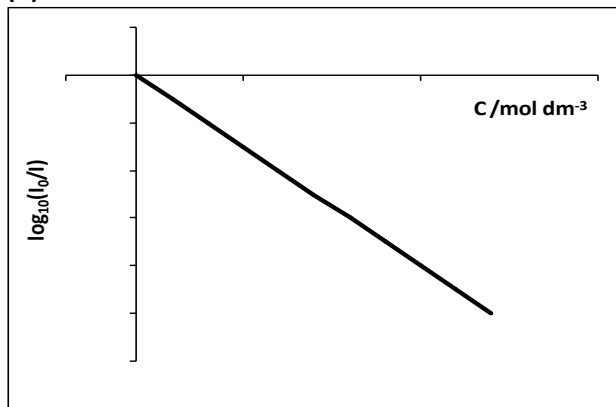
(A)



(B)



(C)



12. A função derivada da inversa da função definida por  $y = 3^{\ln x}$  é:

(A)  $f'(x) = \frac{e^{\log_3 y}}{y \ln 3}$       (B)  $f'(x) = \frac{3^{\ln y} \ln 3}{y}$       10

(C)  $f'(x) = \frac{\ln 3}{3^{\ln y} y}$       (D)  $f'(x) = \frac{\log_3 y}{\ln 3}$

13. A equação  $t = \frac{K\eta}{r\gamma \cos \theta}$  pode ser utilizada para definir uma função  $t = f(\theta)$ .

$K$ ,  $\eta$ ,  $r$  e  $\gamma$  são constantes positivas e  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ .      10

Qual é o contradomínio da função?

(A)  $\left[0, \frac{K\eta}{r\gamma}\right[$       (B)  $\left[\frac{K\eta}{r\gamma}, +\infty\right[$       (C)  $[0, +\infty[$       (D)  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$



**Grupo II**

- É constituído por 3 exercícios.
- É permitida a utilização de máquina de calcular.
- Nas respostas aos itens deste grupo, deverá apresentar todos os cálculos que tiver que efetuar e todas as justificações necessárias. Apenas a uma resolução detalhada e correta será atribuída a cotação máxima.
- Indique claramente, na folha de respostas, o número do exercício.
- Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

**COTAÇÕES**

1. Com o objectivo de manter a concentração plasmática dentro de um intervalo estreito prolongando desta forma o efeito terapêutico, os fármacos são administrados em doses múltiplas. Para determinar a concentração plasmática após a toma da dose  $n$  no caso de uma administração oral em doses múltiplas utiliza-se a equação

$$c_p = \frac{Fk_a D}{V_D(k - k_a)} \left[ \left( \frac{1 - e^{-nk_a\tau}}{1 - e^{-k_a\tau}} \right) e^{-k_a t} - \left( \frac{1 - e^{-nk\tau}}{1 - e^{-k\tau}} \right) e^{-kt} \right]$$

Onde

$D$  = dose

$F$  = fração absorvida

$k_a$  = constante de absorção

$k$  = constante de eliminação

$V_D$  = volume de distribuição

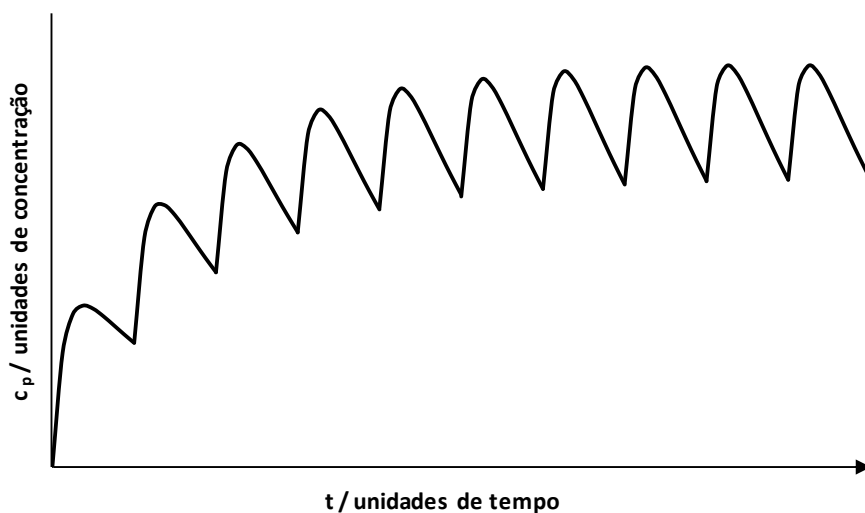
$\tau$  = tempo entre a toma das doses

$t$  = tempo após a toma da dose  $n$ .

25

O aspecto típico da curva de concentração plasmática é o seguinte:





Note que após as tomas iniciais, os valores de  $c_p$  começam a repetir-se. Diz-se, então que  $c_p$  atingiu o valor de estado estacionário,  $c_p^\infty$ .

Deduza a seguinte expressão que permite calcular o valor da concentração máxima no estado estacionário ( $c_{\max}^\infty$ ):

$$c_{\max}^\infty = \frac{Fk_a D}{V_D} \left( \frac{1}{1 - e^{-k\tau}} \right) e^{-kt_{\max}}$$

$$\text{sendo } t_{\max} = \frac{\ln \left[ \frac{k}{k_a} \left( \frac{1 - e^{-k_a\tau}}{1 - e^{-k\tau}} \right) \right]}{k - k_a}.$$

2. A equação  $N(t) = N_0 e^{\left( \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\lambda}{\alpha} e^{-\alpha t} \right)}$  dá o número ( $N$ ) de células de um tumor cujo crescimento siga a relação de Gompertzian.  $t$  representa o tempo e  $N_0$ ,  $\lambda$  e  $\alpha$  são constantes positivas. Esta equação pode ser utilizada para definir uma função  $N = f(t)$ .

2.1. Estude a função indicando:

2.1.1. O seu domínio.

5

2.1.2. Os zeros.

5

2.1.3. A sua continuidade.

5

6ª EDIÇÃO 2016

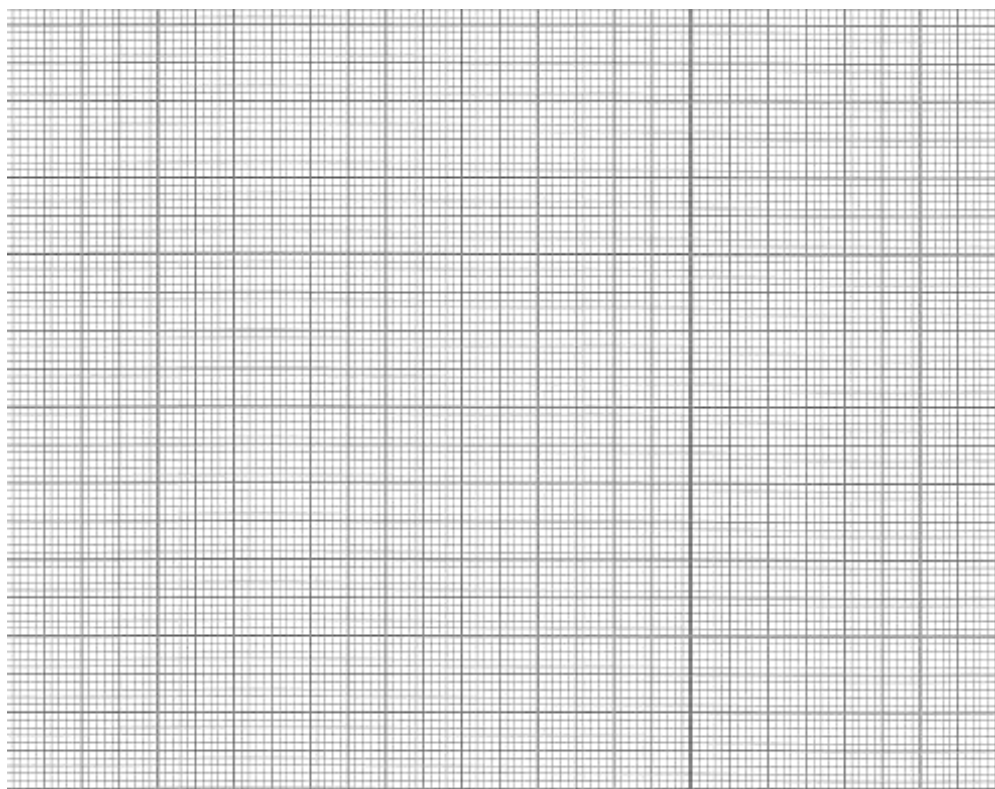
# Olimpíadas do Conhecimento

Universidade Fernando Pessoa

COM UMA NOVA MODALIDADE A CONCURSO

- |  |    |
|--|----|
| 2.1.4. Os intervalos de crescimento e decrescimento. | 10 |
| 2.1.5. Os máximos e mínimos.                         | 10 |
| 2.1.6. O seu contradomínio.                          | 10 |
| 2.1.7. As suas concavidades e pontos de inflexão.    | 15 |

2.2. Esboce o gráfico da função.



5

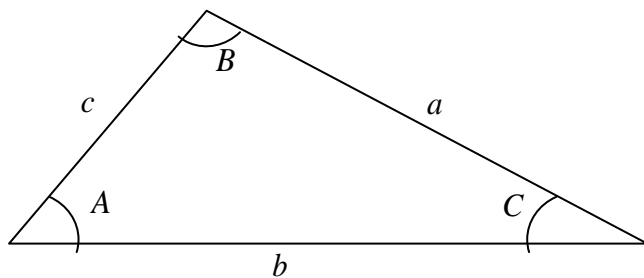
6ª EDIÇÃO 2016

# Olimpíadas do Conhecimento

Universidade Fernando Pessoa

COM UMA NOVA MODALIDADE A CONCURSO

3. Para o triângulo apresentado



Demonstre a seguinte relação conhecida como *lei dos senos*:

10

$$\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c}.$$

6ª EDIÇÃO 2016

# Olimpíadas do Conhecimento

Universidade Fernando Pessoa

COM UMA NOVA MODALIDADE A CONCURSO

## FORMULÁRIO

- Probabilidades, Distribuição Normal Reduzida  $P(Z \leq z)$ ,  $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861



- **Fórmulas trigonométricas correntes**

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$$

$$\text{cos}(-x) = \text{cos}(x)$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cos}(x)$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{cos}(x)$$

$$\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}(x)$$

$$\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{sen}(x)$$

$$(\text{sen}(x))^2 + (\text{cos}(x))^2 = 1$$

$$1 + \frac{1}{\text{tg}^2(x)} = \frac{1}{\text{sen}^2(x)}$$

$$\text{cos}(a \pm b) = \text{cos}(a)\text{cos}(b) \mp \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a)\text{cos}(b) \pm \text{sen}(b)\text{cos}(a)$$

$$\text{cos}(2a) = (\text{cos}(a))^2 - (\text{sen}(a))^2$$

$$\text{sen}(2a) = 2\text{sen}(a)\text{cos}(a)$$

$$\text{sen}(a) + \text{sen}(b) = 2\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{cos}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\text{sen}(a) - \text{sen}(b) = 2\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{cos}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\text{cos}(a) + \text{cos}(b) = 2\text{cos}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{cos}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\text{cos}(a) - \text{cos}(b) = 2\text{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Lei dos co-senos:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Lei dos senos:  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

- Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

- Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u v)' = u' v + u v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$