PROVA NACIONAL ESCRITA DE MATEMÁTICA

Equipa Responsável Pela Elaboração e Correção da Prova:
Prof. Doutor Sérgio Barreira
Prof.ª Doutora Catarina Lemos

Duração da Prova: 120 minutos. Tolerância: 30 minutos
Cotação: 200 PONTOS

Escola de Proveniência dos Concorrentes: ....

Nome para a Equipa (facultativo): ....

Nome dos Concorrentes:	N.º do Documento de Identificação
1.	N.º ....
2.	N.º ....
3.	N.º ....

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

Pode usar uma máquina de calcular, **quando permitido.**

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corretor nas folhas da prova.

Grupo I

- **É constituído por 16 alíneas de escolha múltipla.**
- **Só é permitida a utilização de máquina de calcular nas primeiras 6 questões.**
- **Cada alínea é seguida de quatro respostas possíveis, mas uma e só uma das respostas é a correta.**
- **Indique claramente, na folha de respostas, o número da questão e a letra que identifica a única opção escolhida.**
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

COTAÇÕES

1. Uma caixa contém v bolas vermelhas, numeradas de 1 a v, e b bolas brancas, numeradas de 1 a b. Uma bola é extraída e sua cor observada.

a) Qual a probabilidade da bola extraída ser vermelha? *5*

(A) v / (v + b) **(B)** b / (b + v) **(C)** v / b **(D)** 1 / 2

b) Sabendo que a bola é vermelha, qual a probabilidade de que tenha o número 1?

(A) 2v / (v + b) **(B)** 1 / (b + v) **(C)** 1 / v **(D)** (2 + v) / (v + b) *5*

2. Num grupo de 10 pessoas, qual é a probabilidade de pelo menos duas pessoas fazerem anos no mesmo dia? (Para simplificar, suponha que nenhuma das pessoas nasceu num ano bissexto).

(A) 0 **(B)** 0,8831 **(C)** 0,1169 **(D)** 0,0247 *7,5*

3. De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes (com um sabor cada) numa gelataria que oferece 7 sabores diferentes?

(A) 28 **(B)** 210 **(C)** 330 **(D)** 35 *7,5*

4. Numa população adulta, 45% são homens e 55% mulheres. Sabe-se, ainda, que 40% dos homens e 25% das mulheres fumam. Determine:

a) A probabilidade de que um indivíduo escolhido ao acaso nesta população seja fumador.

(A) 0,3175 **(B)** 0,3325 **(C)** 0,3300 **(D)** 0,3250 *5*

b) A probabilidade de que um indivíduo escolhido ao acaso nesta população seja um homem, sabendo que é um fumador.

(A) 0,1800 **(B)** 0,5538 **(C)** 0,8889 **(D)** 0,5669 *7,5*

5. Sabe-se que numa população 8% das pessoas são infetadas por um vírus causador de uma doença grave. Um determinado teste para a deteção deste vírus é eficiente em 98% dos casos infetados, mas resulta em 4% de resultados positivos para os não infetados.

a) Se o teste de uma pessoa dessa população der resultado positivo, qual a probabilidade de que ela esteja, de facto, infetada?

(A) 0,0784 **(B)** 0,1152 **(C)** 0,8848 **(D)** 0,6806 *7,5*

b) Que confiança poderia ter no teste se o resultado fosse negativo, ou seja, qual a probabilidade da pessoa não estar infetada sendo o teste negativo?

(A) 0,8832 **(B)** 0,8848 **(C)** 0,9982 **(D)** 0,9216 *7,5*

6. Um determinado antibiótico permite a cura completa de infeções urinárias em cerca de 80% das mulheres que o tomam. Suponha que este fármaco vai ser prescrito a uma amostra aleatória de 7 mulheres.

a) Qual a probabilidade de cinco ou seis mulheres ficarem curadas?

(A) 0,1010 **(B)** 0,6423 **(C)** 0,5898 **(D)** 0,0917 *7,5*

b) Qual a probabilidade de todas as mulheres ficarem curadas?

(A) 0,0419 **(B)** 0,8 **(C)** 1 **(D)** 0,2097 *5*

c) Qual a probabilidade de, no máximo, cinco mulheres ficarem curadas?

(A) 0,4233 **(B)** 0,1480 **(C)** 0,5767 **(D)** 0,7903 *5*

A partir da questão 7 <u>não</u> é permitida a utilização de máquina de calcular

7. O sistema $\begin{cases} ax+by+cz=\alpha \\ dx+ey+fz=\beta \\ gx+hy+iz=\lambda \end{cases}$ tem como solução: *7,5*

(A) $\begin{cases} x=\dfrac{\alpha ei-bf\lambda+c\beta h-ce\lambda+b\beta i-\alpha fh}{aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh} \\ y=\dfrac{a\beta i-\alpha fg+cd\lambda-c\beta g+\alpha di-af\lambda}{aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh} \\ z=\dfrac{ae\lambda-b\beta g+\alpha dh-\alpha eg+bd\lambda-a\beta h}{aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh} \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x=\dfrac{\alpha ei-bf\lambda-c\beta h+ce\lambda+b\beta i+\alpha fh}{aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh} \\ y=\dfrac{a\beta i-\alpha fg-cd\lambda+c\beta g+\alpha di+af\lambda}{aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh} \\ z=\dfrac{ae\lambda-b\beta g-\alpha dh+\alpha eg+bd\lambda+a\beta h}{aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh} \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x=\dfrac{\alpha ei+bf\lambda+c\beta h-ce\lambda-b\beta i-\alpha fh}{aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh} \\ y=\dfrac{a\beta i+\alpha fg+cd\lambda-c\beta g-\alpha di-af\lambda}{aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh} \\ z=\dfrac{ae\lambda+b\beta g+\alpha dh-\alpha eg-bd\lambda-a\beta h}{aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh} \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x=\dfrac{\alpha ei-bf\lambda+c\beta h-ce\lambda+b\beta i-\alpha fh}{aei-bfg-cdh+ceg+bdi+afh} \\ y=\dfrac{a\beta i-\alpha fg+cd\lambda-c\beta g+\alpha di-af\lambda}{aei-bfg-cdh+ceg+bdi+afh} \\ z=\dfrac{ae\lambda-b\beta g+\alpha dh-\alpha eg+bd\lambda-a\beta h}{aei-bfg-cdh+ceg+bdi+afh} \end{cases}$

8. O conjunto solução da condição $\left(\frac{1}{5^m}\right)^{5m+1} \cdot 25^{1+2m-m^2} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{1-m}$ é:

(A) $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{7}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{5}{7}}, +\infty\right[$ **(B)** $\left[-\sqrt{\frac{5}{7}}, \sqrt{\frac{5}{7}}\right]$

(C) $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{7}}\right]$ **(D)** $\left[\sqrt{\frac{5}{7}}, +\infty\right[$ *5*

9. A condição $\log_3\left(u - \frac{2u}{3}\right) - \log_9(u+2) = \log_3\left(\sqrt{2u+7}\right) - \frac{5}{2}$ é satisfeita quando:

(A) $u = -\frac{14}{25}$ **(B)** $u = 1$ **(C)** $u = \frac{1}{2}$ **(D)** $u = 2$ *5*

10. O triângulo $[ABC]$, no qual se verifica a relação:

$$senA = \frac{senB + senC}{\cos B + \cos C}$$

(A) Não é retângulo **(B)** É retângulo em A *5*

(C) É retângulo em B **(D)** É retângulo em C

11. Dada a equação $\frac{c - c_0}{c_s - c_0} = 1 + \frac{2a}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right) e^{-\left(\frac{Dn^2\pi^2 t}{a^2}\right)}$, a derivada de c em ordem a r, quando $r = a$, é:

(A) $\frac{2(c_s - c_0)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(n\pi) e^{-\left(\frac{Dn^2\pi^2 t}{a^2}\right)}$ **(B)** $\frac{2(c_s - c_0)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{Dn^2\pi^2 t}{a^2}\right)}$ *7,5*

(C) $\frac{2(c_s - c_0)}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\pi) e^{-\left(\frac{Dn^2\pi^2 t}{a^2}\right)}$ **(D)** $\frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\pi) e^{-\left(\frac{Dn^2\pi^2 t}{a^2}\right)}$

Grupo II

- **É constituído por 4 exercícios.**
- **<u>Não</u> é permitida a utilização de máquina de calcular.**
- **Nas respostas aos itens deste grupo, deverá apresentar todos os cálculos que tiver que efetuar e todas as justificações necessárias. Apenas a uma resolução detalhada e correta será atribuída a cotação máxima.**
- **Indique claramente, na folha de respostas, o número do exercício.**
- **Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.**

COTAÇÕES

1. A função de probabilidade binomial,

$$b(x, n, p) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

10

fornece a probabilidade de ocorrerem *x* sucessos em *n* repetições de uma experiência aleatória, sendo *p* a probabilidade de sucesso em cada tentativa. Mostre que, quando o número de repetições é elevado, a função binominal pode ser substituída pela função de Poisson, cuja fórmula é:

$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}.$$

2. A equação seguinte corresponde a uma administração oral de um fármaco em duas doses, sendo t_1 o tempo de toma da segunda dose:

$$c_p(t) = \begin{cases} \dfrac{c_{p0}k_a}{k-k_a}\left(e^{-k_a t} - e^{-kt}\right) & \text{se } 0 \le t < t_1 \\ \dfrac{c_{p0}k_a}{k-k_a}\left[\left(1+e^{k_a t_1}\right)e^{-k_a t} - \left(1+e^{kt_1}\right)e^{-kt}\right] & \text{se } t_1 \le t \end{cases}$$

A equação pode ser utilizada para definir a função $C_p = f(t)$. Averigue se a função é contínua em t_1, fundamentando a sua resposta. *15*

3. A equação de Hill é utilizada para, matematicamente, descrever a relação entre a intensidade do efeito, E, e a concentração de medicamento, c:

$$E = \frac{E_{\max} \cdot c^{\gamma}}{EC_{50\%} + c^{\gamma}}$$

$E_{\max}$ é a resposta máxima, γ é o coeficiente de Hill (é sempre >1) e $EC_{50\%}$ a concentração que produz 50% da resposta máxima.

Considere a situação de uma administração intravenosa na qual $c(t) = c_0 e^{-kt}$ (t representa o tempo e c_0 a concentração no instante da administração).

3.1. Estude a função $Eoc(t)$, indicando:

3.1.1. O seu domínio. *5*

3.1.2. Os zeros. *5*

3.1.3. A sua continuidade. *5*

3.1.4. Os intervalos de crescimento e decrescimento. *10*

3.1.5. Os máximos e mínimos. *10*

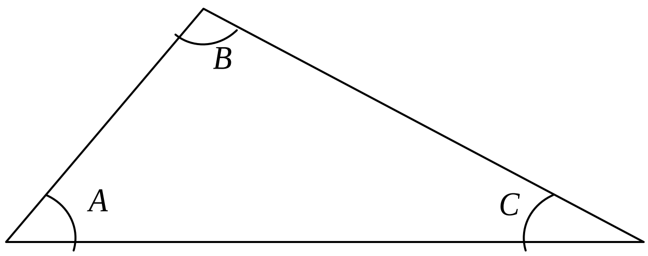
3.1.6. O seu contradomínio. *10*

3.1.7. As suas concavidades e pontos de inflexão. *15*

3.2. Esboce o gráfico da função.

5

4. Mostre que, sendo A, B e C ângulos internos de um triângulo, 10



se verifica:

$$\frac{1}{\tan A}\cdot\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan A}\cdot\frac{1}{\tan C}+\frac{1}{\tan B}\cdot\frac{1}{\tan C}=1.$$

FORMULÁRIO

- **Probabilidades, Distribuição Normal Reduzida** $P(Z \leq z)$, $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

- **Fórmulas trigonométricas correntes**

$$sen(-x) = -sen(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
$$sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sen(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sen(x)$$

$$(sen(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$$
$$1 + \frac{1}{tg^2(x)} = \frac{1}{sen^2(x)}$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp sen(a)sen(b)$$
$$sen(a \pm b) = sen(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a)$$
$$\cos(2a) = (\cos(a))^2 - (sen(a))^2$$
$$sen(2a) = 2sen(a)\cos(a)$$
$$sen(a) + sen(b) = 2sen\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$sen(a) - sen(b) = 2sen\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = 2sen\left(\frac{a+b}{2}\right)sen\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Lei dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Lei dos senos: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

- **Limites notáveis**

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

- **Regras de derivação**

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u'\,e^u$$

$$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$