

**ESTUDO DA SENSIBILIDADE À TEMPERATURA  
E PRESSÃO EM FIBRAS ÓPTICAS MONOMODO  
ESPECIAIS**

RELATÓRIO DE SEMINÁRIO

Licenciatura em Física – Ramo de Óptica e Electrónica

Julho de 1990

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO

António Barbosa Lobo Ribeiro

(reprodução integral e corrigida do original em papel aprovado no exame de dissertação)

© António Lobo Ribeiro, Dept. Física, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto

## SUMÁRIO

No presente trabalho, o nosso interesse principal incide sobre o estudo da fibra óptica “*Side-Tunnel*”, usada em sensores de pressão de alta sensibilidade.

Devido ao facto de se desconhecer resultados teóricos sobre a dependência da sensibilidade deste tipo de fibras ópticas com a temperatura e com a pressão, apresentamos uma proposta de modelo teórico, para o cálculo da variação da sensibilidade com a pressão exterior, a que poderá estar sujeita a fibra.

Usando um modelo analítico, apresentado em 1984 por dois investigadores de uma universidade australiana, determinamos a dependência da sensibilidade com a temperatura e com outras fibras ópticas.

Apresenta-se ainda um resumo histórico da evolução das fibras ópticas especiais. Para finalizar, faz-se uma breve abordagem sobre o efeito de tensão axial nestas fibras.

## **PREFÁCIO**

O presente trabalho da minha autoria foi elaborado no âmbito da cadeira de Seminário do 4º Ano da Licenciatura em Física, ramo de Óptica e Electrónica, sob a orientação do Prof. Doutor António Pereira Leite, durante o ano lectivo de 1989-1990.

O trabalho aqui descrito resulta em parte da investigação realizada por mim no âmbito do projecto Europeu NOSCA: *New Optical Sensor Concepts for Aeronautics* (EC programa BRITE/EURAM AERO-0017-C), no qual o INESC-Porto faz parte integrante do consórcio do projecto constituído também pelos parceiros: British Aerospace (UK), Sextant Avionique (F), THOMSON-CSF (F). A parte dos resultados experimentais do projecto não puderam ser publicados aqui, devido a restrições impostas pelo contrato do projecto europeu que impunha confidencialidade.

## AGRADECIMENTOS

Desejo exprimir os meus agradecimentos:

- ao meu supervisor, Prof. Doutor António Pereira Leite por toda a orientação e apoio prestado no decorrer do trabalho e na realização do presente relatório.
- ao Prof. Doutor Eduardo Lage pela orientação teórica no estudo dos modelos usados para as fibras ópticas especiais.
- ao Dr. João Ferreira pela disponibilidade e apoio sempre constante no desenvolvimento do gerador de sequências.
- ao Eng. Pedro Cardoso pelas tarde “perdidas”, a prestar orientação no uso do CAD, no qual foram realizados todos os circuitos electrónicos.
- ao meu amigo, Dr. José Luís Santos pelo apoio moral e pelas discussões que proporcionaram novas ideias.

E em especial,

- ao INESC-PORTO pela disponibilidade de instalações e material laboratorial, sem o qual não teria sido possível realizar este trabalho.
- ao Grupo de Optoelectrónica do Centro de Física da U.P., pela disponibilidade de todo o software e hardware usado na realização deste relatório.

António Lobo Ribeiro

Porto, 20 de Julho de 1990

# ÍNDICE

ÍNDICE.....	5
1. FIBRAS ÓPTICAS ESPECIAIS.....	6
1.1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA.....	6
1.2 FIBRAS PANDA E BOW-TIE.....	8
1.3 FIBRA “SIDE-TUNNEL”.....	10
1.4 CARACTERÍSTICAS GERAIS E FACTORES DE DEGRADAÇÃO.....	12
1.6 REFERÊNCIAS.....	15
2. ESTUDO DA SENSIBILIDADE À TEMPERATURA.....	17
2.1 INTRODUÇÃO.....	17
2.2 TEORIA.....	17
2.2.1 BIRREFRINGÊNCIA MODAL.....	17
2.2.2 MODELO TEÓRICO.....	19
2.2.3 SENSIBILIDADE À TEMPERATURA.....	25
2.3 RESULTADOS.....	26
2.3.1 RESULTADOS TEÓRICOS.....	26
2.3.2 RESULTADOS NUMÉRICOS.....	30
2.3.3 ANÁLISE COMPARATIVA.....	33
2.4 REFERÊNCIAS.....	34
3. ESTUDO DA SENSIBILIDADE À PRESSÃO.....	36
3.1 INTRODUÇÃO.....	36
3.2 TEORIA.....	36
3.2.1 MODELO TEÓRICO.....	36
3.2.2 SENSIBILIDADE À PRESSÃO.....	40
3.3 RESULTADOS.....	41
3.3.1 RESULTADOS TEÓRICOS.....	41
3.3.2 RESULTADOS NUMÉRICOS.....	43
3.4 REFERÊNCIAS.....	45
4. EFEITO DA TENSÃO AXIAL.....	46
4.1 INTRODUÇÃO.....	46
4.2 RESUMO TEÓRICO.....	46
4.3 EFEITO DA TENSÃO AXIAL NA SENSIBILIDADE.....	48
4.4 RESULTADOS COMPUTACIONAIS.....	48
4.5 REFERÊNCIAS.....	49
5. CONCLUSÃO.....	50

# 1. FIBRAS ÓPTICAS ESPECIAIS

## 1.1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA

Com o aparecimento de sistemas de transmissão óptica coerentes e, novos esquemas de sensores de fibra óptica de alta sensibilidade, onde o estado de polarização da luz nas fibras se torna um factor muito importante, tem vindo a aumentar de interesse o desenvolvimento de novas fibras ópticas, capazes de manter a polarização da luz transmitida, usualmente designadas por fibras PM (Polarization-Maintaining) [1,2].

Estas podem classificar-se em duas categorias:

- Fibras de baixa birrefringência (fibras LB)
- Fibras de alta birrefringência (fibras HB)

Nas fibras LB, as ondas com polarizações lineares ortogonais, podem propagar-se com pequena dispersão; por outro lado, as fibras HB têm o estado de polarização linear fortemente predominante, o que as torna indispensáveis em sistemas de transmissão óptica coerentes ou em dispositivos que não dispõem de controladores do estado de polarização da luz [2].

Como o estado de polarização da luz guiada é sensível às acções exteriores, tais como pressão, curvatura, temperatura, etc., estas fibras apresentam grande interesse no desenvolvimento de sensores de fibra óptica.

Um resumo histórico sobre a pesquisa e desenvolvimento das fibras PM, durante 1976-1985, pode ser dividido nos seguintes cinco períodos [1]:

- 1976-1977

Neste período, a birrefringência modal causada involuntariamente por deformação elíptica do núcleo, era a principal preocupação dos investigadores.

Esquemas para manter a polarização não eram intencionalmente ainda estudados.

- 1978-1979

Variados esquemas de fibras ópticas LPM (Linear Polarization-Maintaining), tais com fibras de núcleo elíptico, fibras de bainha elíptica (*elliptical cladding fibers*), eram principalmente propostas pelos investigadores dos Bell Laboratories, USA. A fibra “*Side-Pitt*” era proposta pelo Japão, e seria a primeira proposta de concepção de uma verdadeira fibra PM.

- 1980-1981

O alvo das pesquisas parece mudar-se dos EUA para o Japão e para a Europa, neste período. Os investigadores do CNET (França) propõem, já no fim de 1980, uma nova fibra: a fibra COM (*Circular Polarization-Maintaining*). Variados modelos de fibras LPM, tais como: fibra com revestimento elíptico, fibra “*Side-Pitt*”, fibra PANDA e fibra com núcleos de 4 sectores (*Four-Sector-Core Fiber*), eram apresentados pelos laboratórios japoneses.

- 1982-1983

A pesquisa e desenvolvimento das variadas fibras continua. O *British Telecom* (BT) reporta, já nos finais de 1982, que a flutuação do estado de polarização da luz não é tão drástica, quando a fibra é cablada e instalada numa conduta. Em 1982, três novas propostas para as estruturas de fibras PM aparecem. A primeira, seria a fibra “*Side-Tunnel*”; a segunda, seria a fibra “*Bow-Tie*”, que é uma versão da fibra PANDA, em que as regiões que produzem o *stress* mecânico têm a forma de um “laço”, o que maximiza a birrefringência. Entretanto a fibra PANDA era melhorada.

Em 1983, eram apresentados dois trabalhos importantes relatados por Birch *et.al.* e por Okamoto *et.al.*, sobre resultados experimentais e teóricos da dispersão da transmissão da luz nestas fibras. [3, 4].

- 1984-1988

O desenvolvimento das fibras PM parece ter abrandado neste período. As razões provavelmente seriam variadas. Primeiro, verificou-se que a produção das fibras PM a custos razoáveis era difícil. Segundo, a pesquisa de métodos alternativos, isto é, esquemas de controladores de polarização, tinha feito bons progressos. Terceiro, a produção de fibras em massa de fibras “baratas” tornava-se na principal preocupação da indústria das fibras ópticas nos países avançados. Como resultado, neste período as fibras PM têm maior aplicação em sensores de fibra óptica, em particular, giroscópios de fibra óptica.

## **1.2 FIBRAS PANDA E BOW-TIE**

Entre os vários tipos de fibras HB, encontram-se duas fibras com estruturas compostas de variadas composições de sílica, o que proporciona efeitos de tensão mecânica interna, tornando estas fibras birrefringentes.

A fibra PANDA (*Polarization-maintaining AND Absorption-reducing*), contém duas regiões de tensão, em ambos os lados do núcleo (Fig.1.1), em geral altamente dopadas com  $B_2O_3$ .

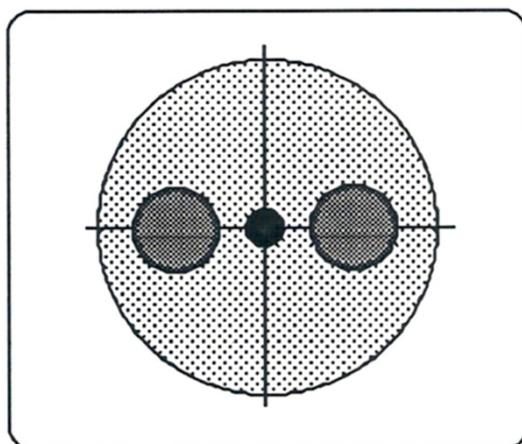


Fig. 1.1– Seção recta de uma fibra PANDA.

Em relação ao núcleo e à bainha, estas regiões têm diferentes coeficientes de expansão térmica linear, o que contribui para o aparecimento de uma birrefringência modal interna que é induzida por tensão mecânica (*stress-induced birefringence*).

A distância destas regiões ao núcleo é particularmente importante para o aumento, ou diminuição do valor da birrefringência modal.

No entanto, um aumento da birrefringência foi conseguido através da criação da fibra “*Bow-Tie*” (isto é, fibra Laço), otimizando a forma da seção das regiões onde se produz a tensão, como nos mostra a figura 1.2.

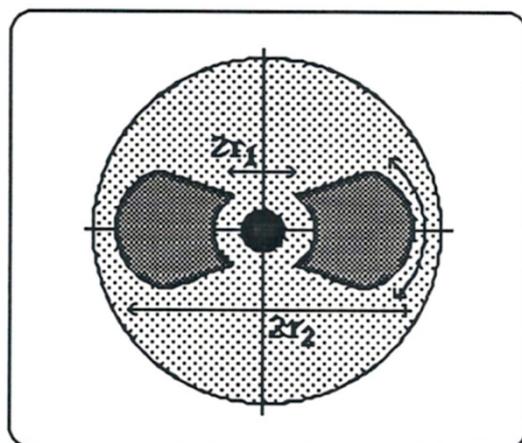


Fig. 1.2 – Seção recta de uma fibra Bow-Tie.

Para a otimização da estrutura da seção desta fibra, mostrou-se, por análise de tensões, que os parâmetros,  $2r_1$ ,  $2r_2$  e  $\theta$ , deverão satisfazer as seguintes condições [1]:

- (a)  $2r_1$ : deverá ter 75% do valor do diâmetro exterior.
- (b)  $2r_2$ : o mais pequeno possível, de contrário as perdas de transmissão aumentam (geralmente  $2r_2$  deverá ter o dobro do diâmetro do núcleo).
- (c)  $\theta$ : aproximadamente igual a  $90^\circ$ .

Em ambas as estruturas (OANDA e Bow-Tie), existem variadas composições químicas para as regiões onde se produz a tensão [2]:

- $\text{GeO}_2\text{-SiO}_2$  : Germanosilicato
- $\text{B}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2$  : Borosilicato
- $\text{P}_2\text{O}_5\text{-SiO}_2$  : Fosforosilicato.

entre outras. Estas fibras são bastante usadas em várias áreas de aplicação, tais como:

- Transmissão e detecção coerente
- Velocímetros
- Giroscópios
- Sensores de campo magnético
- Medidores de fluxos
- Combinações fibra-integrado óptico.

### **1.3 FIBRA “SIDE-TUNNEL”**

Uma estrutura parecida à fibra PANDA, mas com dois canais vazios, em vez das regiões de tensão, é designada por fibra “*Side-Tunnel*” (Fig.1.3).

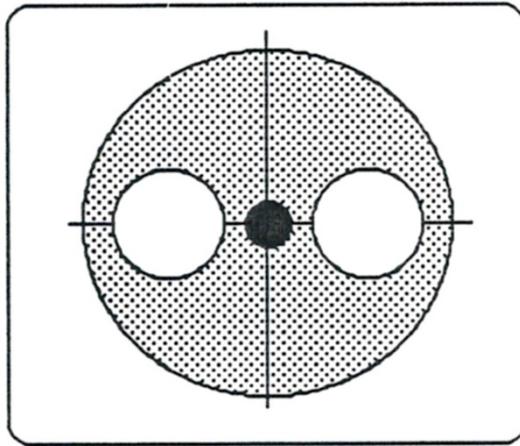


Fig. 1.3 – Secção recta de uma fibra “Side-Tunnel”.

Com este tipo de fibra é possível obter uma relativamente grande birrefringência, sem aplicação de tensão, devido à existência dos túneis em ambos os lados do núcleo.

Verificou-se por análise computacional (Método de Elementos Finitos), que na parte central do núcleo, a tensão segundo a direcção horizontal (Fig.1.3) é aproximadamente nula, enquanto que, ao longo da bainha, a magnitude da tensão decresce rapidamente e que, à medida que os túneis se aproximam do centro da fibra, a birrefringência induzida por tensão aumenta [3].

Um parâmetro importante neste tipo de fibra é o chamado parâmetro de confinamento ( $w$ ), definido pela relação:

$$w = b - 2d_1 \quad (1.1)$$

onde  $b$  é raio exterior da fibra (bainha),  $2d_1$  é o diâmetro dos túneis [4].

Usualmente tem um valor da ordem de 2.5 a 2.6 [3], o que faz com que o diâmetro dos túneis seja aproximadamente de 2/7 do diâmetro exterior (isto é, a bainha).

## 1.4 CARACTERÍSTICAS GERAIS E FACTORES DE DEGRADAÇÃO

Os vários tipos de fibras PM podem ser classificados, sob o ponto de vista de manutenção da polarização linear (*linear polarization-maintaining*), com é apresentado na figura 1.4 [2]:

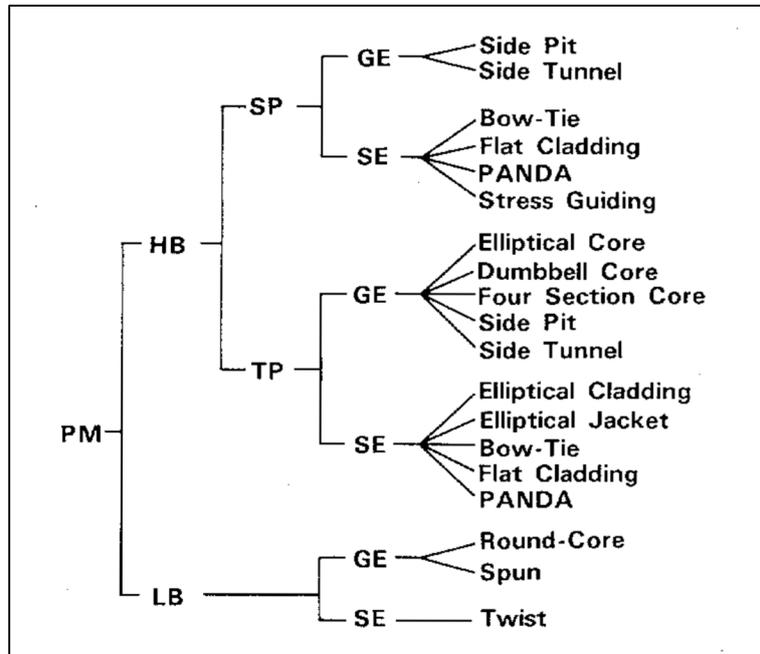


Fig. 1.4 – Grupo de fibras PM.

PM: PolarizationMaintaining, HB: High-Birefringent, LB: Low-Birefringent, SP: Single-Polarization mode, TP: Two-Polarization modes, GE: Geometrical Effect, SE: Stress Effect. [2]

A caracterização destas fibras é, em geral, descrita por três parâmetros importantes [2]:

### A. Birrefringência Modal ( $B$ )

Este é talvez o parâmetro mais importante, e que é definido com a diferença entre os índices efectivos de refração ( $\delta n$ ) dos dois modos ortogonais  $HE_x$  e  $HE_y$  que está relacionado com comprimento de batimento ( $L_P$ ) [1]:

$$L_P = \frac{\lambda}{B} = \frac{2\pi}{\Delta\beta} \quad (1.2)$$

$$B = \frac{\Delta\beta}{k} = \delta n \quad (1.3)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz,  $\Delta\beta$  a diferença entre as constantes de propagação dos modos  $HE_x$  e  $HE_y$ ,  $k$  é o número de onda.

Este parâmetro ( $B$ ) é conveniente para a comparação entre fibras PM fabricadas para diferentes comprimentos de onda, isto porque o comprimento de batimento depende do comprimento de onda da luz [2].

Quando o comprimento de batimento é muito mais pequeno do que o período espacial típico das perturbações geométricas na fibra (p.ex., curvatura), a energia transferida entre os modos  $HE_x$  e  $HE_y$  torna-se desprezável [1].

### **B. Parâmetro e Acoplamento do Modo ( $h$ )**

Este parâmetro caracteriza a capacidade de manter o estado de polarização da luz das fibras PM, relacionado com o acoplamento de modos aleatório, e que está relacionado com o “*crosstalk*” (CT) pela relação [2]:

$$CT = 10 \log \frac{P_x}{P_y} = 10 \log[\tanh(hl)] \quad (1.4)$$

onde  $P_x$  e  $P_y$  são as potências do modo excitado e do modo acoplado, para um dado comprimento de fibra, respectivamente.

### **C. Perda de Transmissão (*Transmission Loss*)**

É necessária na determinação do comprimentos de onda de corte ou na medição das perdas, para comprimentos de onda superiores ao comprimentos de onda de corte. Isto, porque as perdas por transmissão dos modos  $HE_x$  e  $HE_y$  em fibras HB exibem diferentes dependências no comprimento de onda. Este parâmetro é menos importante para comprimentos de fibra pequenos [2].

Na tabela I apresentamos um conjunto de valores típicos destes três parâmetros, para as diversas fibras PM:

CHARACTERISTICS OF REPRESENTATIVE POLARIZATION-MAINTAINING FIBERS

Types	Name of PM Fiber	B $\times 10^{-4}$	h $\times 10^{-6}/m$	Loss (dB/km)	Wavelength ( $\mu m$ )	Fabrication Method	Reference
HB-Fibers with GE	E.Core	4.2	30	85	0.85	MCVD	15-20
	Side Pit	0.5	1	5	1.15	MCVD	23
	Side Tunnel	0.7			1.06	Holed Preform	24
HB-Fibers with SE	E.Cladding	7.2	1.2	5	0.63	MVCD	18, 25-28
	E.Jacket	3.0	1	0.8	1.55	MCVD	16, 29, 30
	PANDA	3.0	0.5	0.25	1.55	Holed Preform	31-37
	" (SP)	5.9	(44dB)	0.3	1.3	Holed Preform	13
	Bow-Tie	4.8		3.6	0.85	Gas Etching	11, 38-42
	" (SP)	6.7	(42dB)	1	0.82	Gas Etching	39
	Flat-Cladd	2.5	5.9	2.6	0.85	Pressed Preform	12
" (SP)	4.7	(34dB)	1	0.63	Pressed Preform	43	
LB-Fibers with GE	Round Core	$4.5 \times 10^{-9}$			0.63	MCVD	44, 45
	Spun	$4.3 \times 10^{-9}$			1.3	Spin-Drawing	46-48
LB-Fibers with SE	Twist	$1.2 \times 10^{-7}$			1.15	Fiber-Twisting	49-50

HB: High-Birefringent, LB: Low-Birefringent, GE: Geometrical Effect  
SE: Stress Effect, SP: Single Polarization

Tabela I – dados extraídos da referência [2].

Não há critério definido, para a distinção entre fibras HB e fibras LB. Na generalidade, considera-se que a birrefringência modal entre estas fibras (HB e LB) é discriminada pela birrefringência de uma fibra monomodo convencional ( $B = 10^{-6}$  até  $10^{-5}$ ).

Nas fibras HB com  $B > 10^{-5}$ , existem dois tipos de fibras (ver tabela I):

- Fibras de polarização-dupla (TP = *Two Polarization*)
- Fibras de polarização-única (SP = *Single Polarization*)

O comportamento do “*crosstalk*” é diferente nestes tipos de fibras (TP e SP). O “*crosstalk*” numa fibra SP torna-se praticamente constante aos -30 dB, e independentemente do comprimento da fibra para além dos 200 metros. No entanto, o “*crosstalk*” nas fibras TP degrada-se com o comprimento da fibra, devido ao acoplamento de modos aleatório (*random mode coupling*) [2]. Quanto aos factores que contribuem para a degradação do estado de polarização, podemos dividi-los em duas categorias [2]:

#### I. FACTORES INTRIÍNECOS

- Imperfeições Estruturais: têm como origens a deformação do núcleo (p.ex. fibras com núcleo elíptico), deformação das regiões de produção de tensão (p.ex., fibra Bow-Tie).

- Comprimento de Onda: a baixa coerência da fonte de luz é um factor de degradação do *crosstalk*, levando à variação da birrefringência modal e da dispersão de polarização com o comprimentos de onda.
- Efeitos Não-Lineares: perturbações não-lineares na birrefringência modal são produzidas pelo efeito de Kerr (com magnitudes de  $B$  estimadas em  $1.5 \times 10^{-6}$ , para uma potência óptica de entrada de 1 mW). Este valor é negligível em fibras HB, mas não em fibras LB.

## II. FACTORES EXTRIÍNSECOS

- Flutuação da Temperatura: nas fibras LB, a influência térmica é menos efectiva do que nas fibras HB.
- Perturbações Mecânicas: tais como curvatura, pressão transversa, torção, compressão, etc.. São mais relevantes nas fibras LB do que nas HB.
- Efeito Electro-Magnético: aplicação de campo eléctrico transversal via efeito de Kerr, ou por aplicação de campo magnético via efeito de Faraday.

## 1.6 REFERÊNCIAS

- [1] T. Okoshi and K. Kikuchi, *Coherent optical fiber communications*, KTK Scientific Publishers, Tokyo, 1988.
- [2] J. Noda, K. Okamoto and Y. Sasaki, “Polarization-Maintaining Fibers and Their Applications”, *J. Lightwave Technol.*, vol.LT-4, No.8, p.1071 (1986).
- [3] K. Hayata, M. Koshiba and M. Susuki, “Stress-Induced Birefringence of Side-Tunnel Type Polarization-Maintaining Fibers”, *J. Lightwave Technol.*, p.601 (1986).

[4] H. Xie, T. Dabkiewicz, R. Ulrich and K. Okamoto, "Side-Hole Fiber for Fiber-Optic Pressure Sensing", *Opt. Lett.*, p.333, (1986).

## 2. ESTUDO DA SENSIBILIDADE À TEMPERATURA

### 2.1 INTRODUÇÃO

Usando o modelo apresentado por dois investigadores, P. L. Chu e R. Sammut [1], foi-nos possível determinar a dependência da birrefringência modal (sensibilidade) com a temperatura, para uma fibra “*Side-Tunnel*”.

O método usado para o cálculo da birrefringência do material, induzida por tensão mecânica, devido ao efeito térmico em fibras monomodo especiais, é baseado da Teoria da Elasticidade, fazendo uso da definição de potencial de deslocamento termoelástico [1-4]. Sendo esta função potencial uma quantidade escalar linear, o princípio da sobreposição é válido. Consequentemente, a tensão total na fibra é obtida adicionando as contribuições individuais das componentes da tensão produzida. Este método de cálculo é aplicável a qualquer estrutura de fibra, embora o nosso interesse incida sobre o estudo dos efeitos de tensão na fibra monomodo do tipo “*Side-Tunnel*”.

### 2.2 TEORIA

#### 2.2.1 BIRREFRINGÊNCIA MODAL

Quando uma fibra de vidro, com estrutura de guia de onda assimétrica, é sujeita a tensões mecânicas (*stress*), índices de refração efectivos ao longo das duas direcções principais de tensão são dados por [5]:

$$n_x = n_{x0} + C_1\sigma_x + C_2\sigma_y \quad (2.1)$$

$$n_y = n_{y0} + C_2\sigma_x + C_1\sigma_y \quad (2.2)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são os coeficientes elasto-ópticos,  $n_{x0}$  e  $n_{y0}$  são os índices de refração efectivos na ausência de tensão assimétrica, que são definidos como:

$$n_{x0} = \frac{\beta_{x0}}{k} \quad (2.3)$$

$$n_{y0} = \frac{\beta_{y0}}{k} \quad (2.4)$$

onde  $\beta_{x0}$  e  $\beta_{y0}$  são as constantes de propagação para as polarizações  $x$  e  $y$ , respectivamente. Então a birrefringência modal pode ser expressa por (2.1 e 2.2):

$$B = n_x - n_y = (n_{x0} - n_{y0}) + (C_1 - C_2)(\sigma_x - \sigma_y) \quad (2.5)$$

onde o primeiro termo da expressão (2.5) denota a birrefringência induzida por anisotropia geométrica ( $B_g$ ), e o segundo termo a birrefringência por tensão ( $B_s$ ).

A birrefringência induzida por anisotropia geométrica pode ser expressa pela relação [5]:

$$B_g = n_1 \Delta^2 \sum_{i=1}^n g_i(V) \varepsilon^i = n_1 \Delta^2 \varepsilon G(V) \quad (2.6)$$

em que:

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \quad (2.6a)$$

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a} \quad (2.6b)$$

onde  $n_1$  é o índice de refração do núcleo,  $n_2$  é o índice de refração da bainha,  $\varepsilon$  é a elipticidade do núcleo,  $\Delta$  a diferença relativa entre os índices de refração do núcleo e da bainha,  $g_i$  são funções da frequência normalizada  $V$ ,  $a$  e  $b$  são os semi-eixos maior e menor do núcleo, respectivamente.

Verificou-se [5] que  $B_g$  não é proporcional a  $\varepsilon$  para grandes elipticidades e, portanto, há necessidade de introdução de termos de maior ordem no somatório (2.6). A expressão

$G(V)$  pode ser encontrada na referência [6]. No entanto a relação (2.6), para a fibra “*Side-Tunnel*” é nula [8], por isso o nosso problema resume-se apenas ao cálculo da birrefringência induzida por tensão ( $B_S$ ), usando o método baseado na Teoria da Elasticidade.

## 2.2.2 MODELO TEÓRICO

Consideremos um cilindro infinito e isotrópico, de tal forma que não existe componente axial do deslocamento, isto é, a deformação axial é nula.

O cálculo da tensão resumir-se-á a um problema de deformação do plano. A deformação total do cilindro é, então:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\varepsilon}_y \quad (2.7)$$

onde  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  representam as componentes principais do tensor das deformações segundo as direcções  $x$  e  $y$ . As relações entre as deformações e os respectivos deslocamentos ( $u,v$ ) serão expressas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.8a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.8b)$$

Define-se ainda deformação de corte ou cisalhamento (“*shear strain*”) pela relação:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.9)$$

Pela lei de Hooke [3], é possível relacionar as deformações com as tensões da seguinte maneira:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.10a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.10b)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \quad (2.10c)$$

onde  $E$  é o módulo de Young,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson, e  $G$  o módulo de rigidez (ou módulo de cisalhamento), que é dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.11)$$

e  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são as componentes principais do tensor das tensões e  $\sigma_{xy}$  é a tensão de corte.

Considerando que o cilindro está sob a acção de um campo de tensões estáticas, mas na ausência de forças exteriores aplicadas, as equações de equilíbrio dadas pela Teoria da Elasticidade serão apenas duas [3]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.12a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.12b)$$

Devido à necessidade de reduzir o número de equações diferenciais, é conveniente introduzir uma função escalar: Função de Airy –  $F(x,y)$  – que é definida da seguinte maneira [3]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (2.13a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (2.13b)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \quad (2.13c)$$

Para um  $F(x,y)$  arbitrário, é fácil que as equações de equilíbrio são satisfeitas. Como o problema está colocado em termos do tensor das tensões, deveremos verificar as

condições de compatibilidade [3]. Para o plano de edfomação, a única equação de compatibilidade que não é identicamente satisfeita é:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.14)$$

Determinando as deformações a partir da lei de Hooke (2.10<sup>a</sup>,b,c), em termos da função  $F(x,y)$ , e substituindo na equação (2.14), encontramos uma equação diferencial em  $F(x,y)$ , que se costuma designar por equação bi-harmónica [3]:

$$\boxed{\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \nabla_i^4 F(x,y) = 0} \quad (2.15)$$

Qualquer solução  $F(x,y)$  que satisfaça a equação (2.15), gera uma possível solução elástica. Como a equação bi-harmónica (2.15) é uma equação diferencial linear, a soma de diversas soluções desta equação é também solução, isto é, podemos sobrepor as soluções elementares consideradas, para chegar à solução de interesse.

A solução geral de  $F(x,y)$ , para problemas a duas dimensões em coordenadas polares, pode ser encontrada na referência [3] na página 133, e virá a ser utilizada mais tarde para o nosso problema aqui em estudo. No entanto, esta equação (2.15) não resolve todo o nosso problema.

Devido aos efeitos termo-elásticos, estudados na Teoria da Tensão Térmica [3], as relações deformação-tensão (2.10<sup>a</sup>,b,c) sofrem a introdução de um termo proveniente da expansão térmica linear do material ( $\alpha$ ), ficando:

$$\varepsilon_x - \alpha T = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.16a)$$

$$\varepsilon_y - \alpha T = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2.16b)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \quad (2.16c)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica linear, e  $T$  a temperatura do material que constitui a fibra. A equação (2.16c) não é afectada pela temperatura, porque uma expansão térmica livre não produz distorção angular num material isotrópico.

Usando as relações (2.10a,b,c) em conjunto com as relações (2.8a,b) e substituindo nas equações de equilíbrio (2.12a,b) e assumindo que não há forças exteriores a actuar no corpo, encontramos as equações de equilíbrio para o problema da tensão-térmica [3]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + (1 - 2\nu)\nabla^2 u = 2(1 + \nu)\frac{\partial \alpha T}{\partial x} \quad (2.17a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + (1 - 2\nu)\nabla^2 u = 2(1 + \nu)\frac{\partial \alpha T}{\partial y} \quad (2.17b)$$

onde  $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y$ .

Uma maneira conveniente de encontrar soluções particulares destas equações de equilíbrio é introduzindo uma função escalar, designada por Potencial de Deslocamento Termo-Elástico –  $\Psi(x,y)$  – e que é definida como [3]:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.18a)$$

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.18b)$$

Esta função  $\Psi(x,y)$  depende das coordenadas espaciais e do tempo, se a temperatura variar com o tempo. Agora as equações de equilíbrio (2.17a,b) serão satisfeitas se tomarmos a função  $\Psi(x,y)$  como solução da equação de Poisson:

$$\boxed{\nabla^2 \Psi(x,y) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha T} \quad (2.19)$$

A solução da equação de Poisson (2.19) é uma solução particular das equações diferenciais de equilíbrio (2.17a,b). A solução complementar será dada por (2.15) e, portanto, a solução geral para o nosso problema será a soma das duas funções  $F(x,y)$  e

$\Psi(x,y)$ , Como estamos interessados em calcular a birrefringência induzida por tensão (2.15) na fibra, o problema resumir-se-á à resolução das equações bi-harmónica (2.15) e de Poisson (2.19).

Determinadas estas funções  $F(x,y)$  e  $\Psi(x,y)$ , é possível achar as componentes da tensão pelas relações [1]:

$$\sigma_r = -\frac{E}{1+\nu} \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \eta}{r \partial \theta^2} \right] \quad (2.20a)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \right] \quad (2.20b)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial \eta}{r \partial \theta} \right] \quad (2.20c)$$

onde  $\eta(x,y) = F(x,y) + \Psi(x,y)$ .

O uso das componentes em coordenadas polares deve-se à geometria do problema em causa (Fig.2.1)

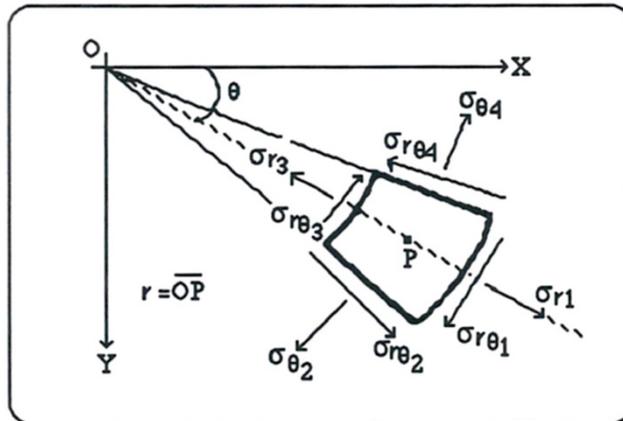


Fig. 2.1 – Corte elementar da secção circular de uma fibra.

No entanto, para a resolução das equações (2.15 e 2.19), é necessária a intridução de condições de fronteira, que serão [1,6,3]:

- (1) Os valores de tensão são finitos no centro do núcleo da fibra.

(2)  $\sigma_r = 0$  e  $\sigma_{r\theta} = 0$ , verificam-se em todos os pontos da circunferência exterior da bainha da fibra (isto é, não há forças exteriores aplicadas à bainha).

(3) As componentes da tensão são contínuas ao longo das regiões de fronteira nas diversas estruturas que compõem a fibra.

(4) A força total axial dissipa-se para uma fibra suficientemente longa (aproximações do cilindro de comprimento infinito).

O procedimento a efectuar para o uso do método poderá ser descrito pelos seguintes passos:

1- Encontrar a função  $\Psi(x,y)$  que satisfaz a equação de Poisson (2.19), para a configuração da fibra em estudo.

2- Encontrar a função  $F(x,y)$  para uma fibra homogénea, em termos de coordenadas polares, e que poderá ser dada por [1,3]:

$$F(r,\theta) = A_0 + B_0 r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{n-2}) \cos(n\theta) \quad (2.21)$$

onde  $A_n$  e  $B_n$  são determinados pelas condições fronteira enunciadas acima (esta equação assume simetria de reflexão para o eixo  $\theta = 0^\circ$  e solução finita para  $r = 0$ ).

3- Calcular as componentes principais de tensão, através das relações (2.20a,b,c).

4- Tendo encontrado os valores das componentes da tensão, a correspondente birrefringência induzida por tensão, definida em (2.5), será expressa em coordenadas polares por [1,3]:

$$\boxed{B_s = (C_1 - C_2)(\sigma_r - \sigma_\theta) \cos(2\theta) - 2(C_1 - C_2)\sigma_{r\theta} \sin(2\theta)} \quad (2.22)$$

### 2.2.3 SENSIBILIDADE À TEMPERATURA

Quando radiação de comprimento de onda  $\lambda$  se propaga através de uma fibra óptica de comprimento  $L$ , que está sujeita a perturbações, a fase óptica  $\Phi$  da luz, após propagação, sofre uma variação [2]:

$$\delta(\Delta\Phi) = \frac{2\pi}{\lambda} [\delta(\Delta n)L + \Delta n\delta L] \quad (2.23)$$

onde  $\Delta n = n_x - n_y$ , isto é, igual à birrefringência modal (2.5), que e para o nosso problema a birrefringência induzida por tensão ( $B_s$ ).

Portanto a expressão (2.23) poderá ser reescrita da forma:

$$\delta(\Delta\Phi) = \frac{2\pi}{\lambda} [\delta B_s L + B_s \delta L] \quad (2.24)$$

Define-se então, a sensibilidade da fibra óptica relativa ao efeito de temperatura por:

$$S_T = \frac{\partial(\Delta\Phi)}{L\partial T} = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{\partial B_s}{\partial T} + B_s \frac{\partial L}{L\partial T} \right] \quad (2.25)$$

O segundo termo representa o valor do coeficiente de expansão térmica linear do núcleo da fibra ( $\alpha_1$ ), em primeira aproximação; logo temos:

$$\boxed{S_T = \frac{\partial(\Delta\Phi)}{L\partial T} = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{\partial B_s}{\partial T} + B_s \alpha_1 \right]} \quad (2.26)$$

O valor da sensibilidade virá expresso em unidades de ( $\text{rad.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ ).

Esta expressão não é afectada pela contribuição do efeito de tensão axial [7], devido ao facto de desprezarmos esse efeito no modelo teórico apresentado; mais tarde será abordado esse tópico.

## 2.3 RESULTADOS

### 2.3.1 RESULTADOS TEÓRICOS

Considerando a estrutura fibra óptica representada na figura 2.2 (fibra “*Side-Tunnel*”), e fazendo uso do método apresentado na secção anterior, começamos por obter soluções da equação (2.19) para as várias regiões da estrutura da fibra apresentada.

Se o material que constitui o núcleo da fibra óptica tem um coeficiente de expansão térmica  $\alpha_1$ , e a bainha um coeficiente  $\alpha_2$  (enquanto que os outros parâmetros são iguais através da fibra), então podemos considerar o problema como sendo equivalente ao cálculo das tensões mecânicas de um cilindro composto.

Note-se que, se o cilindro fosse homogêneo, não era necessário resolver a equação (2.19) como solução da equação bi-harmónica (2.15); uma escolha apropriada das condições de fronteira seria suficiente. Para obter o potencial de deslocamento termo-elástico ( $\Psi$ ) devido à não homogeneidade do cilindro, trocamos  $\alpha$  na equação (2.19) por  $(\alpha_1 - \alpha_2)$  para a região do núcleo, e por  $(-\alpha_2)$  nas regiões tubulares (isto é, nos túneis).

Poderemos então escrever  $\Psi$  como:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2^+ + \Psi_2^- \quad (2.27)$$

onde  $\Psi_1$  representa a contribuição devido à região do núcleo, e  $\Psi_2^+$ ,  $\Psi_2^-$  representam as contribuições devido aos dois túneis (a notação + e – significa túnel da direita e esquerda, respectivamente).

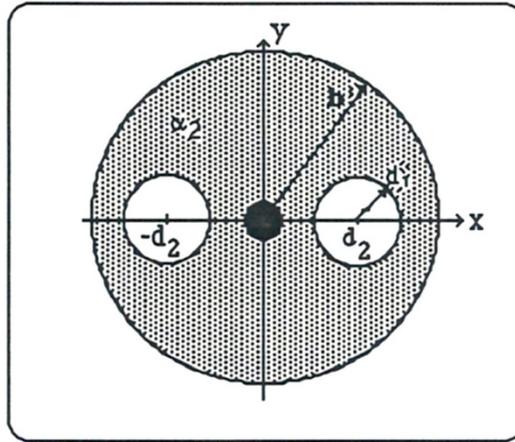


Fig. 2.2 – Corte de uma fibra “Side-Tunnel”.

Teremos então que  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2^+$  e  $\Psi_2^-$  satisfazem a equação de Poisson (2.19) no interior das respectivas regiões, e satisfazem a equação de Laplace fora das regiões, ou seja:

$$\nabla^2 \psi_i = 0 \quad , i = 1, 2 \quad (2.28)$$

Resolvendo as equações (2.19 e 2.28) para as diversas regiões, temos:

NÚCLEO:

$$(r < a): \quad \psi_1(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu} (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{T}{4} r^2 + A_1 = \beta_1 \frac{T}{4} r^2 + A_1 \quad (2.29a)$$

$$(r > a): \quad \psi_1(r) = \beta_1 \frac{a^2 T}{2} \ln r + A_2 \quad (2.29b)$$

Como já determinamos o potencial devido a uma região circular ( $\Psi_1$ ), podemos calcular o potencial devido aos dois túneis, usando apenas uma simples translação de coordenadas, definindo um novo sistema de coordenadas  $(R, \theta)$  com origem no centro do túnel em causa (fig.2.3). Da figura 2.3, tiramos a seguinte relação:

$$R^2 = r^2 - 2rd_2 \cos \theta + d_2^2$$

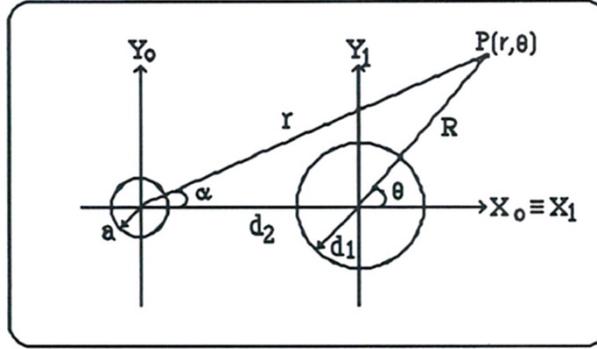


Fig. 2.3 – Translação do Sistema de coordenadas.

### TÚNEIS:

$$\psi_2^\pm(r, \theta) = \frac{1+\nu}{1-\nu}(-\alpha_2) \frac{T}{4} (r^2 \mp 2rd_2 \cos \theta + d_2^2) + A_3 =$$

$$(R < d_1): \quad = \beta_3 \frac{T}{4} (r^2 \mp 2rd_2 \cos \theta + d_2^2) + A_3 \quad (2.30a)$$

$$(R > d_1): \quad \psi_2^\pm(r, \theta) = \beta_3 \frac{d_1^2 T}{4} \ln(r^2 \mp 2rd_2 \cos \theta + d_2^2) + A_4 \quad (2.30b)$$

onde  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  são constantes de integração, que não têm interesse para o cálculo das tensões;  $T$  é a diferença entre a temperatura ambiente e a temperatura de fusão do vidro;  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares;  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são os coeficientes de expansão térmica linear do núcleo e da bainha, respectivamente.

A constante que multiplica o logaritmo na expressão (2.29b) é obtida da maneira a que  $d\psi/dr$  seja contínuo para  $r = a$ .

Como estamos interessados na determinação das componentes de tensão no núcleo, é necessário adicionar apropriadamente os termos devido ao potencial de deslocamento termo-elástico. Considerando (2.27), temos então:

$$\psi = \psi_{1(in)} + \psi_{2(out)}^+ + \psi_{2(out)}^- \quad (2.31)$$

ou seja, adicionamos as relações (2.29a e 2.30b; + e -).

Usando agora as relações (2.20a,b,c) obtemos as componentes da tensão no núcleo, devido ao potencial de deslocamento termo-elástico:

$$\sigma_r^D = -\frac{ET}{2(1+\nu)} \left\{ \beta_1 + \beta_3 d_1^2 \left[ \frac{r^2 + d_2^2 \cos 2\theta - 2rd_2 \cos \theta}{(r^2 + d_2^2 - 2rd_2 \cos \theta)^2} + \frac{r^2 + d_2^2 \cos 2\theta + 2rd_2 \cos \theta}{(r^2 + d_2^2 + 2rd_2 \cos \theta)^2} \right] \right\} \quad (2.32a)$$

$$\sigma_\theta^D = -\frac{ET}{2(1+\nu)} \left\{ \beta_1 - \beta_3 d_1^2 \left[ \frac{r^2 + d_2^2 \cos 2\theta}{(r^2 + d_2^2 - 2rd_2 \cos \theta)^2} + \frac{r^2 + d_2^2 \cos 2\theta}{(r^2 + d_2^2 + 2rd_2 \cos \theta)^2} \right] \right\} \quad (2.32b)$$

$$\sigma_{r\theta}^D = -\frac{ET}{(1+\nu)} \beta_3 d_1^2 d_2 \sin \theta \left[ \frac{r - d_2 \cos \theta}{(r^2 + d_2^2 - 2rd_2 \cos \theta)^2} - \frac{r + d_2 \cos \theta}{(r^2 + d_2^2 + 2rd_2 \cos \theta)^2} \right] \quad (2.32c)$$

Como a solução da equação bi-harmónica (2.21) é uma solução geral, resta-nos determinar o valor dos coeficientes  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $A_n$  e  $B_n$  para o nosso problema.

Adicionamos a função potencial  $\Psi$  (eq. 2.31) à função complementar dada em (2.21), de tal maneira que as condições de fronteira (2ª e 3ª) sejam satisfeitas para  $r = b$  (isto é, o raio exterior da baínha). Substituindo, agora  $\Psi(r, \theta)$  e  $F(r, \theta)$  nas relações (2.20a,b,c) e fazendo uso das condições fronteira acima citadas, obtemos [1]:

$$B_0 = -\frac{T}{2} \left[ \frac{\beta_1 a^2}{2b^2} + \frac{\beta_3 d_1^2}{b^2} \right] \quad (2.33a)$$

$$A_{2n} = \frac{2n+1}{2n} \beta_3 d_1^2 T \left[ \frac{d_2}{b^2} \right]^{2n}, \quad n > 0 \quad (2.33b)$$

$$B_{2n} = -\beta_3 T \left[ \frac{d_1}{b} \right]^2 \left[ \frac{d_2}{b^2} \right]^{2n}, \quad n > 0 \quad (2.33c)$$

com  $A_{2n+1} = B_{2n+1} = 0$ .

A contribuições da função de Airy para as componentes da tensão, em toda a região da secção da fibra, serão obtidas por:

$$\sigma_r^A = -\frac{ET}{(1+\nu)} \left[ 2B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [2n(1-2n)A_{2n}r^{2n-2} + (2-2n)(2n+1)B_{2n}r^{2n}] \cos(2n\theta) \right] \quad (2.34a)$$

$$\sigma_\theta^A = -\frac{ET}{(1+\nu)} \left[ 2B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [2n(2n-1)A_{2n}r^{2n-2} + (2+2n)(2n+1)B_{2n}r^{2n}] \cos(2n\theta) \right] \quad (2.34b)$$

$$\sigma_{r\theta}^A = -\frac{ET}{(1+\nu)} \sum_{n=1}^{\infty} 2n [(2n-1)A_{2n}r^{2n-2} + (2n+1)B_{2n}r^{2n}] \sin(2n\theta) \quad (2.34c)$$

As componentes totais de tensão serão expressas pela soma das duas contribuições:

$$\sigma_i = \sigma_i^A + \sigma_i^D \quad \text{em que } i = r, \theta, r\theta$$

Usando agora a equação nos dá a birrefringência induzida por tensão (2.22) na fibra, para uma aproximação de  $r$  ser muito pequeno (isto é, dentro do núcleo), obtemos:

$$B_S \approx \frac{2E(C_1 - C_2)}{1 - \nu} \alpha_2 T \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \left[ 1 - 3 \left( \frac{d_2}{b} \right)^4 \right] \quad (2.35)$$

e para a sensibilidade da fase óptica em relação à temperatura:

$$S_T = \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \frac{2E(C_1 - C_2)}{1 - \nu} \alpha_2 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \left[ 1 - 3 \left( \frac{d_2}{b} \right)^4 \right] + B_S \alpha_1 \right\} \quad (2.36)$$

### 2.3.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os coeficientes de expansão térmica linear ( $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ), e a grandeza física  $T$ , assumem uma posição importante na estimativa da birrefringência (2.35), e conseqüentemente, na sensibilidade (2.36). Estes valores ( $B_S$  e  $S_T$ ) dependem fortemente da geometria da estrutura usada e dos materiais dopantes que são empregados para os vidros de silicato. Para este estudo, consideramos três tipos de dopagem usados na mesma estrutura de fibra (fibra “*Side-Tunnel*”):

- **Fibra 1:** núcleo de sílica pura e bainha dopada com  $B_2O_3$ - $SiO_2$ .
- **Fibra 2:** núcleo e bainha são feitos de sílica quase pura, apenas apresentando uma pequena diferença de coeficientes de expansão térmica linear.
- **Fibra 3:** núcleo dopado com  $GeO_2$ - $SiO_2$  e bainha de sílica pura.

Os valores dos coeficientes de expansão térmica para os três tipos de fibra considerados são apresentados na tabela I [1,6]:

	$\alpha_1$ [K <sup>-1</sup> ]	$\alpha_2$ [K <sup>-1</sup> ]
<b>Fibra 1</b>	$0.54 \times 10^{-6}$	$4.40 \times 10^{-7}$
<b>Fibra 2</b>	$2.13 \times 10^{-6}$	$0.54 \times 10^{-6}$
<b>Fibra 3</b>	$4.75 \times 10^{-7}$	$4.40 \times 10^{-7}$

Tabela I

Outro parâmetro que é importante considerar, e que já foi brevemente referido no capítulo anterior, é o parâmetro de confinamento ( $w$ ):

$$w = w_1 + w_2 = b - 2d_1 \quad (2.37)$$

Fazendo uso das relações geométricas da estrutura apresentada:

$$\begin{aligned} 2d_1 &= r_2 - r_1 \\ 2d_2 &= r_2 + r_1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

e usando o valor  $b/w = 0.25$  [9], com  $r_1 = w_1$  e  $r_2 = b - w_2$ , obtemos uma relação linear entre o diâmetro dos túneis e o diâmetro exterior da bainha:

$$\boxed{d_1 = 0.3b} \quad (2.39)$$

Os outros parâmetros são [1,4,5,6]:

$E = 76.7 \text{ GNm}^{-2}$
$\nu = 0.18$
$T = -1123 \text{ K}$
$b = 60 \text{ }\mu\text{m}$
$C_1 = 7.57 \times 10^{-13} \text{ m}^2\text{N}^{-1}$
$C_2 = 4.19 \times 10^{-12} \text{ m}^2\text{N}^{-1}$

Admitindo, para esta fibra, o parâmetro  $d_2 = 30.7 \text{ }\mu\text{m}$  [1] e introduzindo os valores acima descritos nas equações (2.35 e 2.36), considerando dois comprimentos de onda diferentes, obtemos os valores da Tabela II:

	$\lambda = 0.633 \mu\text{m}$		$\lambda = 0.850 \mu\text{m}$	
	$B_s(T)$	$S_T$ [rad/K · m]	$B_s(T)$	$S_T$ [rad/K · m]
<b>Fibra 1</b>	$6.56 \times 10^{-5}$	0.77	$6.56 \times 10^{-5}$	0.57
<b>Fibra 2</b>	$8.04 \times 10^{-5}$	0.94	$8.04 \times 10^{-5}$	0.70
<b>Fibra 3</b>	$6.56 \times 10^{-5}$	0.77	$6.56 \times 10^{-5}$	0.57

Tabela II

Estes valores de sensibilidade poderão ser comparados com os valores experimentais obtidos pela THOMSON-CSF (parceiro do projecto europeu NOSCA), em que apresentam um valor de  $0.3 \text{ rad.K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . Notemos que, para este resultado experimental, desconhece-se o valor do parâmetro  $d_2$  da fibra.

Pela figura 2.4, verifica-se que, quanto maior é a abertura dos túneis, maior é a sensibilidade da fibra à temperatura; no entanto, quanto mais próximos os túneis se encontram do núcleo, mas sensível se torna a variação da sensibilidade à temperatura, à medida que alteramos a abertura dos túneis.

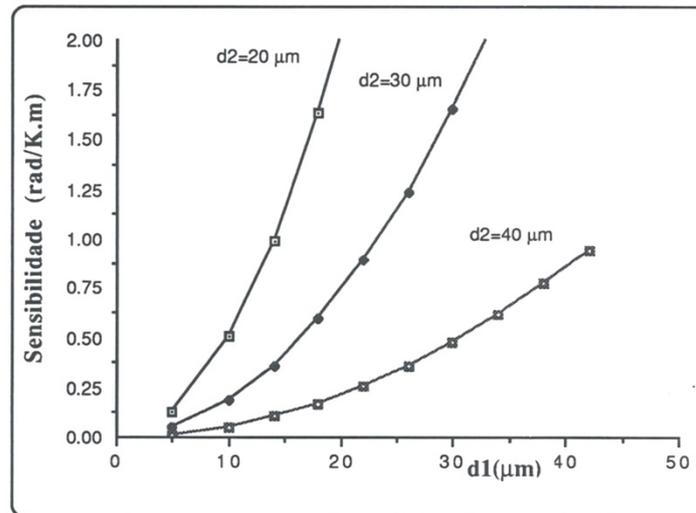


Fig. 2.4 – Sensibilidade à temperatura para uma fibra “Side-Tunnel” em função da posição e abertura dos túneis..

### 2.3.3 ANÁLISE COMPARATIVA

Nesta secção pretendemos apresentar uma breve comparação de resultados entre a fibra “*Side-Tunnel*” e as fibras PANDA e *Bow-Tie*.

Consideremos então as estruturas das figuras 2.5 e 2.6, e atendendo às relações (2.38), mostra-se, que a birrefringência induzida por tensão mecânica para estas fibras é dada por [1]:

#### FIBRA PANDA

$$B_S^{PANDA} \approx \frac{2E(C_1 - C_2)}{1 - \nu} (\alpha_2 - \alpha_3) T \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \left[ 1 - 3 \left( \frac{d_2}{b} \right)^4 \right] \quad (2.40)$$

#### FIBRA BOW-TIE

$$B_S^{BOW-TIE} \approx \frac{E(C_1 - C_2)}{(1 - \nu)\pi} (\alpha_2 - \alpha_3) T \left\{ 2 \log \left( \frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{r_2}{b} \right)^4 - \left( \frac{r_1}{b} \right)^4 \right] \right\} \quad (2.41)$$

onde  $\alpha_3$  é o coeficiente de expansão térmica linear das regiões de tensão mecânica.

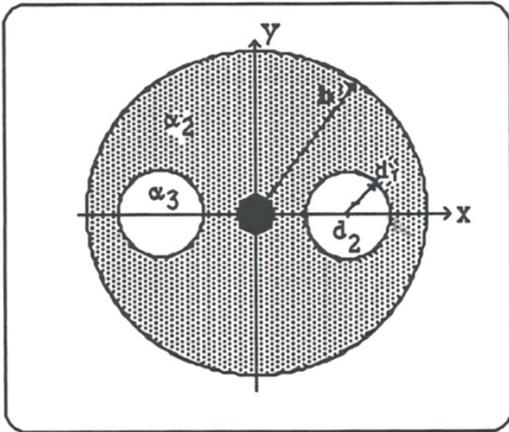


Fig. 2.5 – Fibra PANDA

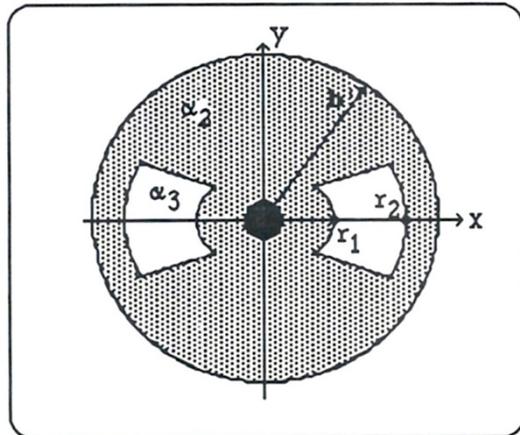


Fig. 2.6 – Fibra BOW-TIE

Tomando os seguintes parâmetros [1]:

$$E = 76.7 \text{ GN/m}^2 ; \nu = 0.18 ; C_1 = 7.6 \times 10^{-13} \text{ m}^2/\text{N} ; C_2 = 4.2 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$$

$$\alpha_1 = 2.12 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1} ; \alpha_2 = 5.40 \times 10^{-7} \text{ K}^{-1} ; \alpha_3 = 1.45 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

$$b = 60 \text{ } \mu\text{m} ; r_2 = 50 \text{ } \mu\text{m} ; \lambda = 0.633 \text{ } \mu\text{m} ; T = -1123 \text{ K}$$

É possível observar na figura 2.7 a variação da sensibilidade à temperatura para as três estruturas de fibra consideradas. Na fibra “*Bow-Tie*” verifica-se a existência de um zero na sensibilidade. Isto significa que a birrefringência nesta fibra apresenta um valor máximo no ponto  $d_2 = 36 \text{ } \mu\text{m}$  [1].

Concluimos que a fibra “*Side-Tunnel*” é menos sensível à temperatura do que a fibra PANDA, quando consideramos a variação da posição do centro dos túneis ou das regiões de tensão, respectivamente.

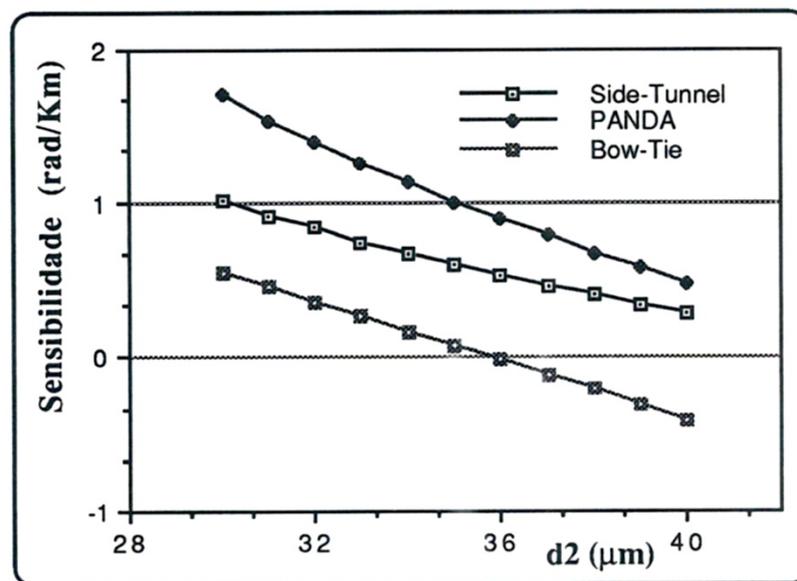


Fig. 2.7 – Sensibilidade à temperatura das fibras *Side-Tunnel*, PANDA e *Bow-Tie*.

## 2.4 REFERÊNCIAS

- [1] P. L. Chu and R. Sammut, “Analytical Method for Calculation of Stress and Material Birrefringence in Polarization-Maintaining Optical Fiber”, *J. Lightwave Technol.*, p.650 (1984).

- [2] P. L. Chu and D. Wong, "Phase Sensitivity of PM Fibers Used as Temperature Sensor", *J. Lightwave Technol.*, p.41 (1986).
- [3] P. Timoshenko and J. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 3<sup>rd</sup>Ed., New York, 1970.
- [4] K. Hayata, M. Koshiba and M. Susuki, "Stress-Induced Birefringence of Side-Tunnel Type Polarization-Maintaining Fibers", *J. Lightwave Technol.*, p.601 (1986).
- [5] K. Okamoto, T. Hosaka and Y. Sasaki, "Linearly Single Polarization Fibers With Zero Polarization Mode Dispersion", *IEEE J. Quantum Electron.*, p.496, (1982).
- [6] J. Sakai and T. Kimura, "Birefringence Caused by Thermal Stress in Elliptically Deformed Core Optical Fibers", *IEEE J. Quantum Electron.*, p.1899, (1982).
- [7] P. Chu and Sammut, "Axial Stress and Its Effect on Relative Strength of PM Fibers and Preforms", *J. Lightwave Technol.*, p.283 (1985).
- [8] J. Noda, K. Okamoto and Y. Sasaki, "Polarization-Maintaining Fibers and Their Applications", *J. Lightwave Technol.*, p.1071 (1986).
- [9] M. Turpin, D. Rojas and C. Puech, "Nouveaux Concepts de Capteurs Repartis à Toute Fibre", *THOMSON-CSF Report*, NOSCA EC-Project (1990).

### **3. ESTUDO DA SENSIBILIDADE À PRESSÃO**

#### **3.1 INTRODUÇÃO**

O método para a determinação da birrefringência do material, e respectiva sensibilidade à tensão mecânica induzida devido ao efeito de pressão exterior em fibras “*Side-Tunnel*”, é baseado na Teoria do Potenciais Complexos [1].

O problema resume-se, novamente, à resolução da equação bi-harmónica. Fazendo uso de funções potenciais complexas, que estão directamente relacionadas com as componentes de tensão mecânica. Como estas funções satisfazem um operador linear, então o princípio da sobreposição será válido.

Apresenta-se valores numéricos da dependência da sensibilidade à pressão, para certos valores dos parâmetros geométricos da fibra. No presente trabalho, não é considerado o efeito de pressão interna nos túneis da fibra.

#### **3.2 TEORIA**

##### **3.2.1 MODELO TEÓRICO**

Consideremos uma fibra “*Side-Tunnel*” (Fig.3.1), suposta de comprimento infinito e sujeita a pressão exterior ( $P_0$ ), distribuída uniformemente e radialmente na superfície exterior da fibra (isto é, na bainha).

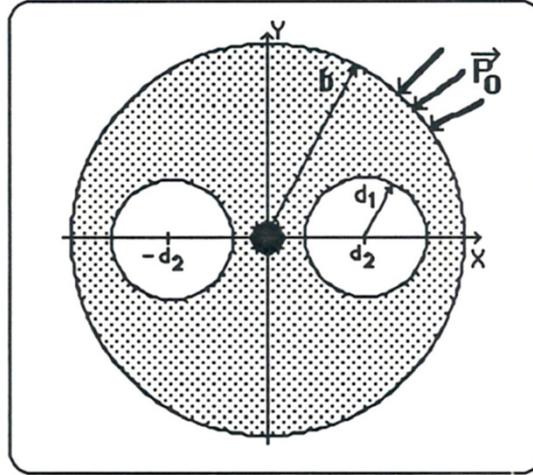


Fig. 3.1 – Secção de uma fibra “Side-Tunnel” sujeita a pressão exterior ( $P_0$ ).

Como estamos interessados em resolver a equação bi-harmónica (2.15), com vista a obter a distribuição de tensão, introduzimos duas funções complexas e analíticas  $\psi(z)$  e  $\varphi(z)$ , que estão relacionadas com a função da equação bi-harmónica  $F(x,y)$  pela relação [1]:

$$2F = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(z) + \chi(z) + \bar{\chi}(z) \quad (3.1)$$

onde  $z = re^{i\theta}$  (variável complexa) e  $\bar{z}$  é o complexo conjugado da variável  $z$ ; e a

função complexa :  $\frac{d\chi(z)}{dz} = \chi'(z) = \psi(z)$

Como as funções  $\psi(z)$  e  $\varphi(z)$  são analíticas, então  $F(x,y)$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathfrak{R}$ .

As componentes da tensão ( $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$ ) vêm relacionadas com as funções complexas dadas, pelas seguintes relações [1]:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2[\varphi(z) + \bar{\varphi}(z)] \quad (3.2)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{i\theta} [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (3.3)$$

Por simplicidade de cálculo, e atendendo à simetria do problema, vamos considerar apenas um túnel (Fig.3.2)

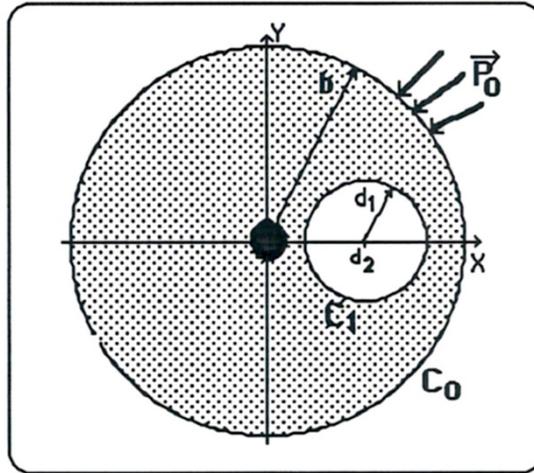


Fig. 3.2 – Fibra “Side-Tunnel” com apenas um túnel.

Definindo as regiões circulares (túnel e bainha) como contornos de um plano complexo ( $C_0$  e  $C_1$  – ver Fig.3.2), as duas funções complexas  $\psi(z)$  e  $\varphi(z)$  irão satisfazer um operador linear L [1]:

$$L[\psi(t), \varphi(t)] = \varphi(t) + t\bar{\varphi}'(t) + \bar{\psi}(t) = U(t) \quad \text{em } C_i (i = 0, 1) \quad (3.4)$$

em que a variável  $t = be^{i\theta}$  representa o valor de  $z$  sobre o contorno  $C_i$  da região  $i$ , e  $U(t)$  é uma função contínua definida pelas condições fronteira do problema.

As funções complexas  $\psi(z)$  e  $\varphi(z)$  serão construídas como a soma de séries:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) \quad (3.5a)$$

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) \quad (3.5b)$$

A construção destas funções pode ser feita dependendo do tipo de integrais de Cauchy a usar ou de determinados procedimentos provenientes de equações integro-diferenciais [1]. Soluções exactas seriam ideais, é claro, mas soluções aproximadas poderão ser obtidas por processos iterativos, após um número finito de passos, como por exemplo, o método de Schwarz [1].

## MÉTODO DE SCHWARZ

Consideremos o operador linear definido em (3.4). Para obter a primeira aproximação  $[\psi_1(t), \varphi_1(t)]$ , determinamos as funções  $\psi_1(t)$  e  $\varphi_1(t)$  para o contorno  $C_0$ , tal que:

$$L[\psi_1(t), \varphi_1(t)] = U(t) \quad \text{para } C_0 \quad (3.6)$$

Para obter a segunda aproximação, consideramos:

$$L[\psi_2(t), \varphi_2(t)] = U(t) - L[\psi_1(t), \varphi_1(t)] \quad \text{para } C_1 \quad (3.7)$$

Para a terceira aproximação:

$$L[\psi_3(t), \varphi_3(t)] = U(t) - L[\psi_2(t), \varphi_2(t)] \quad \text{para } C_0 \quad (3.8)$$

e assim sucessivamente.

O uso deste procedimento permite construir soluções aproximadas de certos tipos de problemas elasto-estáticos em domínios duplamente conectáveis. Resumindo, o processo iterativo pode ser escrito com generalidade pela forma [1]:

$$L[\psi_{2n}(t), \varphi_{2n}(t)] = -L[\psi_{2n+1}(t), \varphi_{2n+1}(t)] \quad \text{em } C_0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9a)$$

$$L[\psi_{2n+1}(t), \varphi_{2n+1}(t)] = -L[\psi_{2n}(t), \varphi_{2n}(t)] \quad \text{em } C_1, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9b)$$

onde as funções  $\psi_{2n}(z)$  e  $\varphi_{2n}(z)$  são singulares e analíticas na região finita  $|z| < b$ , e  $\psi_{2n+1}(z)$  e  $\varphi_{2n+1}(z)$  são singulares e analíticas na região finita  $|z - d_2| > d_1$  (incluindo um ponto no infinito).

As condições de fronteira a considerar neste problema serão:

$$L[\psi(t), \varphi(t)] = \text{const.} \quad \text{para } C_1$$

$$L[\psi(t), \varphi(t)] = -P_0 t \quad \text{para } C_0$$

Para a região interior  $|z| < b$ , as funções complexas na primeira aproximação serão determinadas pela condição fronteira:

$$L[\psi_0(t), \varphi_0(t)] = U_0(t) \quad \text{para } C_0 \quad (3.10)$$

Então  $\psi_0(t)$  e  $\varphi_0(t)$  para esta região serão dadas pelas relações [1]:

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{U_0(t)}{t-z} dt - \frac{z}{4\pi i} \int_{C_0} \frac{U_0(t)}{t^2} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{U_0(t)}{t} dt \quad (3.11a)$$

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\bar{U}_0(t)}{t-z} dt - \frac{b^2}{z} \varphi_0'(t) + \frac{b^2}{4\pi i z} \int_{C_0} \frac{U_0(t)}{t^2} dt \quad (3.11b)$$

Por outro lado a região exterior  $|z-d_2| > d_1$ , a condição de fronteira será:

$$L[\psi_1(t), \varphi_1(t)] = -L[\psi_0(t), \varphi_0(t)] = U_1(t) \quad \text{para } C_1 \quad (3.12)$$

As funções complexas para esta região exterior são expressas por [1]:

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{U_1(t)}{t-\zeta} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{U_1(t)}{t} dt \quad (3.13a)$$

$$\psi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\bar{U}_1(t)}{t-\zeta} dt - \frac{d_1^2}{\zeta} \varphi_1'(\zeta) \quad (3.13b)$$

onde  $\zeta = z - d_2$  é sobre o contorno  $C_1$ . O processo volta novamente às equações (3.11a,b), apenas com a função  $U_2(t)$  que é obtida pelas relações (3.9).

Determinadas as expressões (3.5a,b), podemos obter os valores das componentes da tensão através das equações (3.2) e (3.3), restando-nos substituir na equação (2.22), para calcular a birrefringência induzida por tensão mecânica, devido ao efeito de pressão exterior.

### 3.2.2 SENSIBILIDADE À PRESSÃO

Como já foi visto no capítulo anterior, a variação da fase óptica  $\Phi$  da luz é obtida pela relação (2.23). Portanto, para determinar a sensibilidade da fibra óptica relativamente ao efeito de pressão, basta calcular:

$$S_p = \frac{\partial(\Delta\Phi)}{L\partial P} = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{\partial B_s}{\partial P} + B_s \frac{\partial L}{L\partial P} \right] \quad (3.14)$$

Neste caso,  $B_s$  é referente ao efeito de pressão e obtido pelo método de Schwarz. O segundo termo desta expressão é obtido da Teoria da Elasticidade [2]:

$$\frac{\partial L}{L\partial P} = -\frac{(1-2\nu)}{E} \quad (3.15)$$

Logo teremos,

$$\boxed{S_p = \frac{\partial(\Delta\Phi)}{L\partial P} = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{\partial B_s}{\partial P} - B_s \frac{(1-2\nu)}{E} \right]} \quad (3.16)$$

O valor da sensibilidade virá expressa nas unidades ( $\text{rad}\cdot\text{bar}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ ).

### 3.3 RESULTADOS

#### 3.3.1 RESULTADOS TEÓRICOS

Considerando a estrutura fibra óptica representada na figura 3.2 , e tomando o vector

de pressão ( $P_0$ ), como:  $\vec{P}_0 = -P_0 \cos\theta \vec{u}_x - P_0 \sin\theta \vec{u}_y$ , podemos facilmente calcular  $U_0(t)$  pelo integral:

$$U_0(t) = i \int_{\theta} P_0 b e^{i\theta} d\theta = -P_0 t \quad \text{sobre } C_0 \quad (3.17)$$

Usando as expressões (3.11 a,b) para este valor de  $U_0(t)$ , obtemos:

$$|z| < b : \begin{cases} \varphi_0(z) = -P_0 \frac{z}{2} \\ \psi_0(z) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Aplicando a técnica acima descrita para obter a segunda aproximação (para a região interior – contorno  $C_1$ ), o que significa realizar uma transformação conformal do tipo:

$\zeta = d_1/\xi$  [1], obtemos:

$$U_1(t) = P_0 \left[ \frac{d_1}{t} + d_2 \right] \quad (3.19)$$

Usando agora as expressões (3.13a,b) para a região interior:

$$|z - d_2| > d_1 : \begin{cases} \varphi_1(z) = 0 \\ \psi_1(z) = \frac{d_1^2 P_0}{z - d_2} + P_0 d_2 \end{cases} \quad (3.20)$$

Voltando novamente à região exterior, determinamos as funções para a terceira aproximação, usando agora um transformação conformal do tipo:  $z = b\xi$  [1]; logo temos:

$$U_2(t) = -P_0 \left[ \frac{d_1^2}{t - d_2} + d_2 \right] \quad (3.21)$$

Aplicando as expressões (3.11a,b):

$$|z| < b : \begin{cases} \varphi_2(z) = -\frac{d_1^2 P_0 z (b^2 + d_2 z)}{2b^2 (b^2 - d_2)} \\ \psi_2(z) = \frac{d_1^2 P_0 d_2 (2b^2 - d_2 z)}{b^2 - z d_2} - P_0 d_2 \end{cases} \quad (3.22)$$

(apenas calculamos até à terceira aproximação). As funções potenciais complexas serão a soma das três contribuições obtidas (3.18), (3.20) e (3.22). Tomando agora a aproximação de  $r$  pequeno, como no capítulo anterior, nas derivadas que aparecem nas relações (3.2) e (3.3), verifica-se que  $\psi'(z) \gg \varphi''(z)$ , e portanto:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2P_0 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \left[ 3 \left( \frac{d_2}{b} \right)^4 - 1 \right] \cos 2\theta \quad (3.23a)$$

$$\sigma_{r\theta} = P_0 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \left[ 3 \left( \frac{d_2}{b} \right)^4 - 1 \right] \sin 2\theta \quad (3.23b)$$

Estas expressões representam apenas o efeito de túnel. Como as funções satisfazem um operador linear, então o princípio da sobreposição é válido, e devido à simetria do problema podemos assumir resultado idêntico para o túnel da esquerda, o que implica que:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 4P_0 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \left[ 3 \left( \frac{d_2}{b} \right)^4 - 1 \right] \cos 2\theta \quad (3.24a)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2P_0 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \left[ 3 \left( \frac{d_2}{b} \right)^4 - 1 \right] \sin 2\theta \quad (3.24b)$$

Substituindo estes resultados na expressão (2.22), a birrefringência induzida por tensão, devida ao efeito de pressão exterior, poderá ser dada por:

$$B_s \approx 4P_0 (C_1 - C_2) \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \left[ 1 - 3 \left( \frac{d_2}{b} \right)^4 \right] \quad (3.25)$$

e a respectiva sensibilidade à pressão será dada por:

$$S_p = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{B_s}{P_0} - \frac{(1-2\nu)}{E} B_s \right] \quad (3.26)$$

### 3.3.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Usando os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} E &= 76.7 \text{ GN/m}^2 \\ C_1 - C_2 &= 3.433 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N} \\ \nu &= 0.18 \\ P_0 &= 10 \text{ bar} = 10 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

O valor da pressão usado para o cálculo foi escolhido de acordo com os resultados experimentais em laboratório publicados pela THOMSON-CSF, em que apresentam um valor para  $S_P = 6 \text{ rad.bar}^{-1}.\text{m}^{-1}$  [4]. Na referência [3] apresentam-se valores da sensibilidade  $S_P = 10 \text{ rad.bar}^{-1}.\text{m}^{-1}$  (para pressão exterior aplicada), embora se desconheça o valor preciso do parâmetro  $d_2$  que afecta o resultado, como se pode verificar pelos gráficos apresentados a seguir e modelizados pelo nosso método. Contudo no nosso modelo e usando as equações (3.25) e (3.26) o valor teórico obtido é surpreendentemente próximo:  $S_P = 6.49 \text{ rad.bar}^{-1}.\text{m}^{-1}$ !

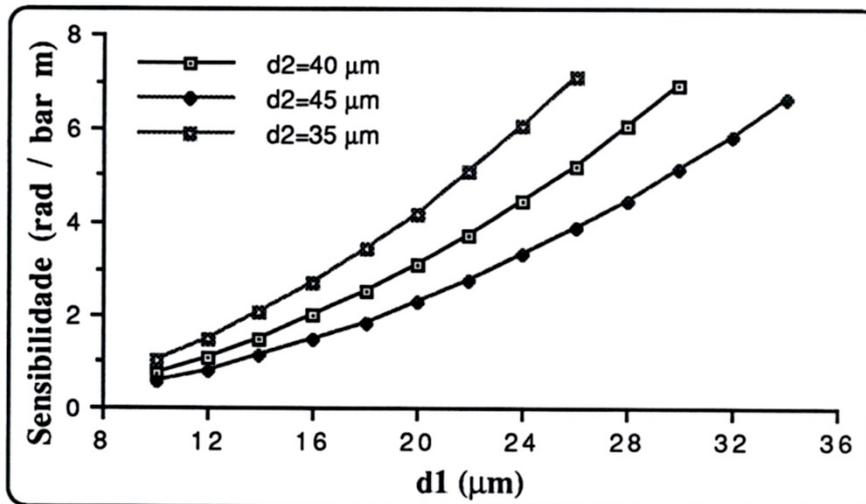


Fig. 3.3 – Sensibilidade à pressão de uma fibra “Side-Tunnel” para  $b = 95 \mu\text{m}$ .

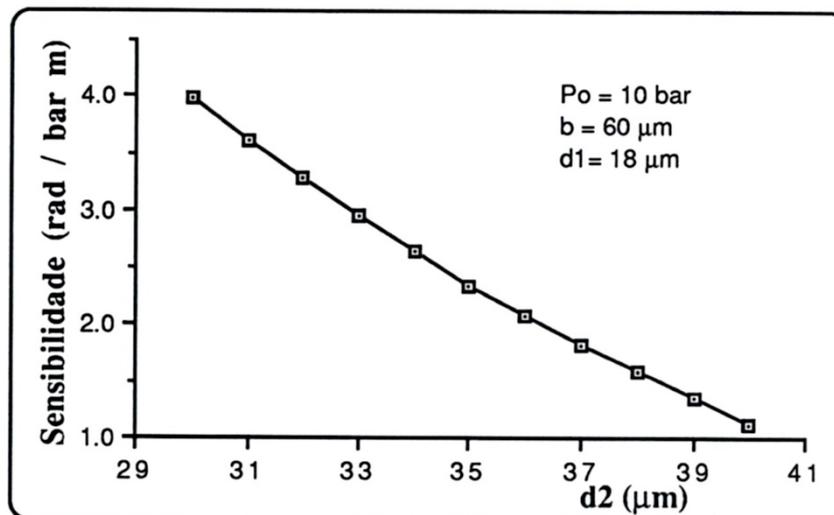


Fig. 3.4 – Sensibilidade à pressão de uma fibra “Side-Tunnel” em função da posição do túnel, para  $b = 60 \mu\text{m}$ .

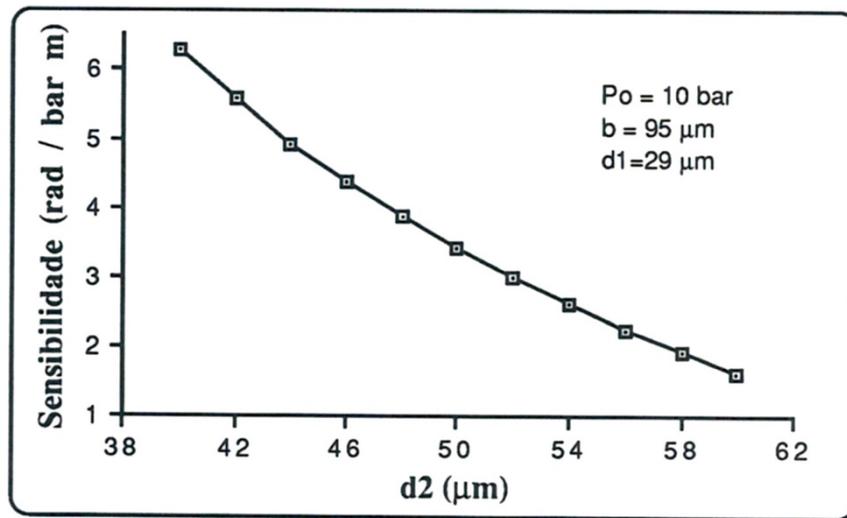


Fig. 3.5 – Sensibilidade à pressão de uma fibra “Side-Tunnel” em função da posição do túnel, para  $b = 95 \mu\text{m}$ .

### 3.4 REFERÊNCIAS

- [1] I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 2ªEd., New York, 1956.
- [2] G. B. Hocker, “Fiber-Optic Sensing of Pressure and Temperature”, *Appl. Opt.*, p.1445 (1979).
- [3] H. Xie, T. Dabkiewicz, R. Ulrich and K. Okamoto, “Side-Hole Fiber for Fiber-Optic Pressure Sensing”, *Opt. Lett.*, p.333 (1986).
- [4] M. Turpin, D. Rojas and C. Puech, “Nouveaux Concepts de Capteurs Repartis à Toute Fibre”, *THOMSON-CSF Report*, NOSCA EC-Project (1990).

## 4. EFEITO DA TENSÃO AXIAL

### 4.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores, os cálculos foram realizados não tomando em conta o efeito de tensão axial na fibra óptica. Pretende-se agora, resumir alguns resultados sobre o esse efeito, e que foram estudados recentemente pelos investigadores P. Chu e R. Sammut [1], e que no âmbito deste trabalho não foram considerados.

### 4.2 RESUMO TEÓRICO

No cálculo da tensão devida ao efeito térmico (Capítulo 2), assumiu-se que os extremos da fibra estavam fixos e, portanto, o deslocamento axial seria nulo, isto é,  $\varepsilon_z = 0$ .

Senso assim, a tensão axial ( $\sigma_z^*$ ) resultante será dada por [1]:

$$\sigma_z^* = \nu(\sigma_r^A + \sigma_\theta^A) - \frac{E}{(1+\nu)} \beta_i T \quad (4.1)$$

onde  $i=1,3$ ; o expoente  $A$  refere-se à contribuição de Airy, e os outros parâmetros são os mesmos definidos no Capítulo 2.

No entanto na prática, as extremidades da fibra são livres de se mover, e a tensão axial poderá ser expressa pela relação (4.1). Para calcular a tensão axial total ( $\sigma_z$ ), é necessário satisfazer a seguinte condição fronteira:  $\sigma_z = 0$ . Em ambas as extremidades da fibra [2].

Uma solução rigorosa para este problema ainda não foi encontrada, mas uma aproximação válida para cilindros longos, poderá ser obtida [2]. Supõem-se então, uma força adicional mas oposta a  $\sigma_z^*$ , e aplicada em ambas as extremidades da fibra, de

maneira a que a condição fronteira seja satisfeita. Senso assim, a força  $F$  pode ser expressa pela seguinte relação [2]:

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^b \sigma_z^* r dr d\theta \quad (4.2)$$

onde  $b$  é o raio exterior (baínha) e  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares.

A tensão adicional, devida à força  $F$ , será então dada por [2]:

$$\sigma_z^F = \frac{F}{\pi b^2} \quad (4.3)$$

Como consideramos um plano de deformação, assume-se que não existe efeito de curvatura (*bending*). Logo, implica a existência de outra tensão  $\sigma_z^M$ , que resulta da aplicação de momento de força ( $M$ ) igual e oposto, resultante de  $\sigma_z^*$ . Estes momento será dado por [2]:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^b \sigma_z^* r^2 \cos \theta dr d\theta \quad (4.4)$$

A tensão  $\sigma_z^M$  resultante do efeito de curvatura virá dada por [1]:

$$\sigma_z^M = \frac{Mr \cos \theta}{I} \quad (4.5)$$

Onde  $I$  é o momento de inércia da fibra, que é definido por [2]:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^b (r \cos \theta)^2 r dr d\theta = \frac{\pi b^4}{4} \quad (4.6)$$

Uma aproximação para o valor da tensão axial total, poderá então ser expressa por [2]:

$$\boxed{\sigma_z^F = \sigma_z^* - \sigma_z^F - \sigma_z^M} \quad (4.7)$$

### 4.3 EFEITO DA TENSÃO AXIAL NA SENSIBILIDADE

Quando calculamos a variação da fase óptica  $\Phi$ , surgem dois termos:

$$\delta(\Delta\Phi) = \frac{2\pi}{\lambda} [\Delta n \delta L + \delta(\Delta n)L] \quad (4.8)$$

onde o primeiro termo representa a deformação axial da fibra, e o segundo o efeito de deformação óptica, neste caso, a variação da birrefringência da fibra. Como a deformação axial no núcleo, é a soma da expansão térmica livre ( $\alpha_1 T$ ), e da deformação axial ( $\varepsilon_z^T$ ) devida às tensões térmica [3], então podemos escrever que a variação do comprimento da fibra pode ser expressa por:

$$\delta L = \varepsilon_z L = \alpha_1 T L + \frac{L}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \quad (4.9)$$

O segundo termo desta expressão (4.9) não é considerado nos cálculos dos capítulos 2 e 3, e seria esta a correção a fazer nas nossas expressões (2.26) e (3.16), e que saiem fora do âmbito do presente trabalho.

### 4.4 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Como no âmbito do nosso trabalho não foi calculado o efeito de tensão axial na fibra “*Side-Tunnel*”, apresentamos, por isso, alguns resultados computacionais obtidos por outros autores [2], sobre o efeito de tensão axial em fibras PANDA e BOW-TIE (ver figuras 4.1 e 4.2). Para mais informação consultar a referência [2].

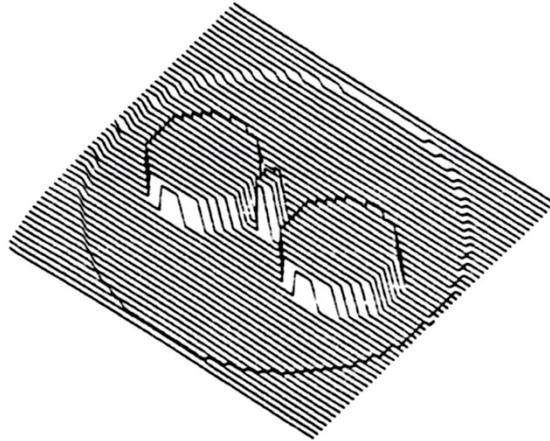


Fig. 4.1 – Perfil 3D da tensão axial total de uma fibra PANDA em função das coordenadas polares.

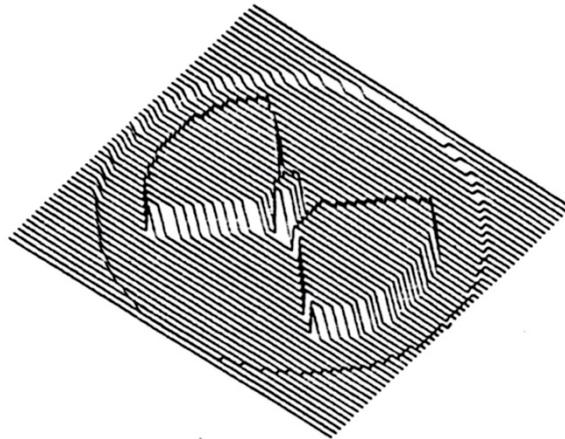


Fig. 4.2 – Perfil 3D da tensão axial total de uma fibra BOW-TIE em função das coordenadas polares.

## 4.5 REFERÊNCIAS

- [1] P. Timoshenko and J. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 3ªEd., New York, 1970.
- [2] P. Chu and Sammut, “Axial Stress and Its Effect on Relative Strength of PM Fibers and Preforms”, *J. Lightwave Technol.*, p.283 (1985).
- [2] P. Chu and D. Wong, “Phase Sensitivity of PM Optical Fibers Used as Temperature Sensor”, *J. Lightwave Technol.*, p.41 (1986).

## 5. CONCLUSÃO

O trabalho aqui apresentado incidiu sobre a modelização teórica da birrefringência induzida por tensão mecânica em fibras ópticas monomodo especiais, vulgarmente designadas por fibras PM (*Polarization-Maintaining*), e a sua dependência com a temperatura e pressão externa, com o objectivo de aplicar estas fibras no desenvolvimento de sensores de fibra óptica para a indústria aeronáutica. Os resultados experimentais obtidos em laboratório com os protótipos sensores em fibra óptica para a medição de temperatura e pressão externa, não puderam ser apresentados aqui devido a razões de confidencialidade com os parceiros do projecto Europeu NOSCA. Foi apenas possível comparar os resultados dos modelos teóricos com os obtidos em laboratório, e que revelaram uma concordância razoável.