Universidade Fernando Pessoa

Departamento de Ciências e Tecnologia

Exame especial para alunos trabalhadores-estudantes

Álgebra Linear e Geometria Analítica

2000/Setembro/1

*Curso de **Engenharia do Ambiente***
*Curso de **Engenharia Informática***
*Curso de **Engenharia Civil***
*Curso de **Engenharia da Qualidade***
*Curso de **Arquitectura e Urbanismo***

Duração: 2 h
Tolerância: 30 min

Nota: Apresente todos os cálculos que efectuar, justificando devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular.

Utilize sempre matrizes na resolução de sistemas de equações lineares, a não ser que no enunciado lhe seja pedido outro método.

Escreva cada GRUPO de questões em FOLHAS SEPARADAS.

Grupo I

1. (2 valores)

Sendo **A** e **B** matrizes quadradas e invertíveis, prove que **CD**=**DC**=**I** sabendo que $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{T}$, $\mathbf{C}=\mathbf{ABA}^{T}$ e $\mathbf{D}=\mathbf{AB}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

2. (3 valores)

Calcule a inversa da matriz **A** a partir da expressão $\mathbf{A}^3-4\mathbf{A}^2+5\mathbf{A}-2\mathbf{I}=\mathbf{0}$, sendo

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$. Verifique o resultado que obteve.

Grupo II

3. (3 valores)

Seja o espaço vectorial $\boldsymbol{V} = \mathbf{M}(n,n)$ e $\mathbf{B}$ uma matriz fixa em $\boldsymbol{V}$.

Seja a aplicação $\mathbf{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ definida por $\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \mathbf{AB} + \mathbf{BA}$, com $\mathbf{A} \in \boldsymbol{V}$.

Diga, demonstrando, se a aplicação $\mathbf{T}$ é linear ou não.

Grupo III

4. (3 valores) Prove que $\begin{vmatrix} a & b & b & c \\ -c & 0 & b & b \\ c & d & d & d \\ 0 & b & b & c \end{vmatrix} = -ad$ sabendo que $\begin{vmatrix} b & b \\ b & c \end{vmatrix} = 1$.

5. (3 valores) Considere a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & y & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & x & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Qual a condição a que devem obedecer x e y para que $|\mathbf{A}|=0$?

Grupo IV

6. (3.5 valores)

Dado um espaço vectorial $\mathbf{E}$ e uma base S= $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, deduza as fórmulas que lhe permitem obter a base ortogonal S'= $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ a partir de S.

Grupo V

7.(a) (1 valor) Encontre as equações cartesianas das rectas que passam pelos pontos (1,1) e (-2,1) e têm direcções (-2,1) e (1,-3), respectivamente.

7.(b) (1 valor) Determine o ponto de intersecção das duas rectas da alínea anterior.

7.(c) (0.5 valores) Calcule o ângulo entre estas duas rectas.