Universidade Fernando Pessoa

Departamento de Ciência e Tecnologia

Exame **1998/01/07**

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Curso de **Engenharia das Construções Civis –** Época especial trabalhador-estudante

Duração: 2 h

Tolerância: 30 min

Nota: Apresente todos os cálculos que efectuar, justificando devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular.

1. Estude o seguinte sistema de equações para os diferentes valores do parâmetro a: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = a \end{cases}$. Justifique convenientemente todas as respostas.

2. Dadas as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, determine as matrizes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ que verifiquem as condições:

   a) $\mathbf{AX}^T = \mathbf{BC} - \mathbf{C}^2$,

   b) $\mathbf{YB} = \mathbf{C}^T - \mathbf{A}^2$.

3. Considere as seguintes bases de $\Re^2$: $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1 = (1,3), \mathbf{b}_2 = (2,5)\}$ e $\mathbf{C} = \{\mathbf{c}_1 = (1,0), \mathbf{c}_2 = (0,1)\}$.

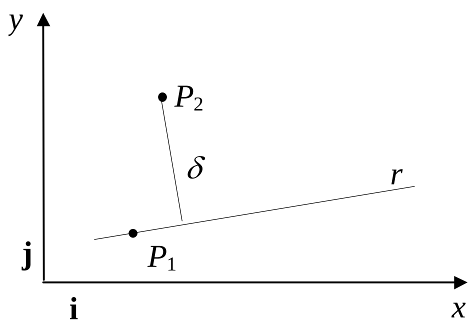
   a) Determine a matriz mudança da base $\mathbf{C}$ para a base $\mathbf{B}$ e a matriz mudança da base $\mathbf{B}$ para a base $\mathbf{C}$.

b) Seja a transformação linear $T:\Re^2 \to \Re^2$, $T(x,y)=(2y,3x-y)$. Mostre que $\mathbf{A_B} = \left(\mathbf{M_C^B}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A_C} \cdot \mathbf{M_C^B}$, sendo $\mathbf{A_B}$ e $\mathbf{A_C}$ as matrizes associadas à transformação T das bases $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, respectivamente.

4. Utilizando o método das permutações generalize o cálculo do determinante de quarta ordem seguinte: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$. Justifique convenientemente todos os passos.

5. Condidere uma base de $\Re^4$ definida por $\mathbf{A}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_4\}$ com $\mathbf{u}_1=(1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_2=(1,0,2,1)$, $\mathbf{u}_3=(0,1,2,1)$ e $\mathbf{u}_4=(1,2,1,0)$. Determine a correspondente base ortonormal. Considere $\mathbf{C}=\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4\}$ a base ortogonal e $\mathbf{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ a base ortonormal.

6. Deduza a distância δ entre um ponto P_2 de coordenadas (x_2,y_2) e uma recta r, expressa pela equação $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$, tal que



Prof: Alzira Dinis