Universidade Fernando Pessoa

Departamento de Ciência e Tecnologia

Exame de Recurso **1998/07/09**

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Curso de **Engenharia do Ambiente** 1º Semestre

Curso de **Engenharia da Comunicação**

Curso de **Engenharia Civil**

Curso de **Engenharia da Qualidade**

Duração: 2 h

Tolerância: 30 min

Nota: Apresente todos os cálculos que efectuar, justificando devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular. Não pode escrever a lápis.

1. Estude o seguinte sistema de equações, através da utilização do método de eliminação de Gauss, para os diferentes valores do parâmetro p:

$$\begin{cases} x + y + z - 2t = 1 \\ -x + 2y + z + pt = -1 \\ y + 2z + 3t = 6 \\ 2x + 3y + z + t = 7 \end{cases}$$

. Justifique convenientemente a metodologia utilizada.

2. Dadas as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, determine as matrizes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ que verifiquem as condições:

a) $\mathbf{A}\mathbf{X}^T = \mathbf{B}\mathbf{C} - \mathbf{C}^2$,

b) $\mathbf{Y}\mathbf{B} = \mathbf{C}^T - \mathbf{A}^2$.

3. Considere as seguintes bases de $\Re^2$: $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1 = (1,3), \mathbf{b}_2 = (2,5)\}$ e $\mathbf{C} = \{\mathbf{c}_1 = (1,0), \mathbf{c}_2 = (0,1)\}$.

a) Determine a matriz mudança da base $\mathbf{C}$ para a base $\mathbf{B}$ e a matriz mudança da base $\mathbf{B}$ para a base $\mathbf{C}$.

b) Seja a transformação linear $T : \Re^2 \to \Re^2$, $T(x, y) = (2y, 3x - y)$. Mostre que $\mathbf{A_B} = \left(\mathbf{M_C^B}\right)^{-1} \cdot \mathbf{A_C} \cdot \mathbf{M_C^B}$, sendo $\mathbf{A_B}$ e $\mathbf{A_C}$ as matrizes associadas à transformação T das bases $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, respectivamente.

4. Sabendo que A, B e C são os três ângulos internos de um triângulo e recordando que $\sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x - y)$ e que $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$, mostre que o determinante seguinte é nulo: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \tan\frac{A}{2} & \tan\frac{B}{2} & \tan\frac{C}{2} \end{vmatrix} = 0$

5. Prove que o determinante de uma matriz triangular superior de ordem n é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

6. Considere a transformação de $\Re^3$, conjunto dos termos ordenados de números reais em $\Re^3$ representada, em certa base, pela matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine uma matriz diagonal $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}$ que representa a transformação dada, embora noutra base.

7. Considere a seguinte base $\left\{\mathbf{a} = (1,2,1), \mathbf{b} = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right), \mathbf{c} = (1,0,-2)\right\}$.

Relativamente ao produto interno $(v_1, v_2, v_3) \cdot (p_1, p_2, p_3) =$ $= v_3 p_3 + 3v_2 p_2 + 2v_1 p_1$:

a) Verifique se a base é ortogonal,

b) Deduza a base ortonormal a partir da anterior.

Prof: Alzira Dinis

Prof: Ana Fonseca