Universidade Fernando Pessoa

Departamento de Ciência e Tecnologia

Exame **1998/02/12**

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Curso de **Engenharia do Ambiente** 1º Semestre

Curso de **Engenharia da Comunicação**

Curso de **Engenharia Civil**

Curso de **Engenharia da Qualidade**

Duração: 2 h

Tolerância: 30 min

Nota: Apresente todos os cálculos que efectuar, justificando devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular. Não pode escrever a lápis.

1. Estude o seguinte sistema de equações, através do método de eliminação de Gauss, para os diferentes valores do parâmetro m : $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1 + mx_2 + 3x_3 = m \\ 2x_1 + x_2 + mx_3 = m \end{cases}$.

   Justifique convenientemente todas as respostas.

2. Sabendo que $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$ são vectores do espaço $\Re^4$ linearmente independentes sobre o corpo dos números reais, prove que os vectores $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$, $\mathbf{y}_4$, tais que: $\begin{array}{l} \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{y}_4 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \end{array}$ também são linearmente independentes.

3. Considere a seguinte transformação: $\begin{array}{l} T:\Re^2 \to \Re \\ T(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & x+y & 0 \end{vmatrix} \end{array}$. Sem utilizar a regra de Sarrus, determine:

a) Se a transformação é linear,

b) Qual o núcleo da transformação,

c) Qual a sua matriz associada,

d) Qual o valor de $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, utilizando o resultado da alínea anterior.

4. Verifique a identidade $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix} = 4\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x-z}{2}\sin\frac{y-z}{2}$ se $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$, $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$ e $\sin a\cos b - \cos a\sin b = \sin(a-b)$.

5. Considere a seguinte fórmula quadrática no plano: $p(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$:

a) Reduza-a à forma canónica,

b) Determine os vectores próprios unitários da matriz da forma quadrática,

c) Prove que os vectores da alínea anterior formam uma base de $\Re^2$ (base $\mathbf{B}$),

d) Determine as coordenadas do vector $\mathbf{v} = (1,-1)$ na base $\mathbf{B}$,

e) Prove que $p(\mathbf{v}) = p'(\mathbf{v_B})$,

f) Determine a equação reduzida da seguinte cónica: $2x^2 + 2y^2 + 2xy + 7\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y + 10 = 0$.

6. Dado o plano π_1 que passa pelo ponto $A = (2,1,3)$ e é paralelo aos vectores $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ determine:

a) A equação geral do plano,

b) As equações paramétricas do plano,

c) As equações na forma simétrica da recta r de intersecção do plano dado ao plano π_2 dado pelas equações: $\begin{cases} x = 2 - 2h + 3t \\ y = 4 + h + 2t \\ z = -5 + t \end{cases}$.

Prof: Alzira Dinis

Prof: Ana Fonseca