Universidade Fernando Pessoa

Departamento de Ciência e Tecnologia

Exame da época especial trabalhador-estudante

Álgebra Linear e Geometria Analítica

1999/9/14

Cursos:

Arquitetura e Urbanismo
Engenharia do Ambiente
Engenharia Civil
Engenharia da Comunicação
Engenharia da Qualidade

Duração: 2 h

Tolerância: 30 min

Nota: Apresente todos os cálculos que efectuar, justificando devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular.

1. Sejam as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

   a. Determine **A**+**B**, **A**-**B** e $\lambda\mathbf{A}+\mu(\mathbf{B}+\mathbf{C})$.

   b. Verifique que: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

   e $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$

2. Seja a matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$. Sabendo que $\mathbf{A}^3-4\mathbf{A}^2+5\mathbf{A}-2\mathbf{I}=\mathbf{0}$, calcule a inversa de **A**.

3. Seja **V** um conjunto arbitrário, não vazio, de elementos no qual são definidas duas operações: adição e multiplicação por escalares. **V** diz-se um espaço vectorial se

os seguintes axiomas são satisfeitos para todos os elementos $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ em **V** e todos os escalares *k* e *n*:

1. Se $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ são elementos de **V**, então $\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}$ pertence a **V**.
2. $\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{u}}$
3. $\vec{\mathbf{u}}+(\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}})=(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}})+\vec{\mathbf{w}}$
4. Existe um elemento $\vec{\mathbf{0}}$ em **V**, chamado vector nulo em **V**, tal que $\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{u}}=\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{u}}$ para todo o $\vec{\mathbf{u}}$ pertencente a **V**.
5. Para cada $\vec{\mathbf{u}}$ pertencente a **V** existe um elemento $-\vec{\mathbf{u}}$, pertencente a **V**, chamado o simétrico de $\vec{\mathbf{u}}$, tal que $\vec{\mathbf{u}}+(-\vec{\mathbf{u}})=(-\vec{\mathbf{u}})+\vec{\mathbf{u}}=\vec{\mathbf{0}}$.
6. Se *k* for um escalar qualquer e $\vec{\mathbf{u}}$ um qualquer elemento de **V**, então $k\vec{\mathbf{u}}$ pertence a **V**.
7. $k(\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}})=k\vec{\mathbf{u}}+k\vec{\mathbf{v}}$
8. $(k+n)\,\vec{\mathbf{u}}=k\vec{\mathbf{u}}+n\vec{\mathbf{u}}$
9. $k(n\vec{\mathbf{u}})=(k.n)\vec{\mathbf{u}}$
10. $1\vec{\mathbf{u}}=\vec{\mathbf{u}}$

Determine se o seguinte conjunto é um espaço vectorial, verificando **todos** os axiomas anteriores: Conjunto de todas as triplas de números reais da forma (*x*,*y*,*z*), no qual estão definidas as seguintes operações:

$$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$$
$$k(x,y,z)=(kx,ky,kz)$$

4. Seja a transformação linear definida do seguinte modo:

$$T:\Re^3\rightarrow\Re^3,\ T(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}x_2\\x_1-x_3\\x_2+x_3-x_1\end{bmatrix}$$

Dadas as bases $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ e $B'=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ onde $\vec{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{u}_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ e $\vec{v}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$, determine $[\mathrm{T}]_B$. Encontre $[\mathrm{T}]_{B'}$ através da equação $[\mathrm{T}]_{B'}=\mathrm{P}^{-1}[\mathrm{T}]_B\mathrm{P}$.

Nota: $[\mathrm{T}]_B$= matriz associada à transformação T na base B

$[\mathrm{T}]_{B'}$ = matriz associada à transformação T na base B'

P=matriz mudança da base B' para B

5. Nas alíneas seguintes calcule o determinante apresentado por simples inspecção, isto é, olhe para ele e com base nas propriedades que conhece indique o resultado final, justificando.

   a. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 43 & 14 & 0 \\ \sqrt{43} & 43 & -1 \end{vmatrix}$

   b. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 6 \\ -3 & -24 & -18 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

   c. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 9 & -12 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 4/5 & 2/5 & 6/5 & -8/5 \\ 2/3 & -1/3 & 5/3 & 8/3 \end{vmatrix}$

6. Suponha que dispõe de três vectores em $\Re^3$ tais que:

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \ \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \\ -16 \end{bmatrix}, \ \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ -14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   Proceda à ortonormalização dos três vectores segundo o produto interno $\vec{x}\boldsymbol{.}\vec{y} = \vec{x}^{\mathrm{T}}\vec{y}$.

7. Determine, sem utilizar qualquer tipo de sistema de equação ou matrizes, um vector unitário simultaneamente ortogonal aos vectores $\vec{u} = (2,-6,3)$ e $\vec{v} = (4,3,1)$. Indique duas soluções.

8. Seja o plano ε que passa pelo ponto (1,4,-2) e é paralelo aos vectores $\vec{a} = (1,2,4)$ e $\vec{b} = (2,3,-1)$. Determine a equação vectorial da recta que resulta da intersecção do plano ε com o plano ρ definido pelas equações $\begin{cases} x = -5 + h \\ y = 3 - 2h + t \\ z = 2 \end{cases}$.

Questão	**Cotação**
1.a	*10*
1.b	*12.5*
2	*15*
3	*40*
4	*40*
5.a	*2.5*
5.b	*2.5*
5.c	*2.5*
6	*40*
7	*10*
8	*25*
Total:	*200*

Prof: Alzira Dinis

Prof. Ana Fonseca