Universidade Fernando Pessoa

Departamento de Ciência e Tecnologia

Exame época normal 1º semestre

Álgebra Linear e Geometria Analítica

2000/01/17

Curso de **Engenharia do Ambiente**
Curso de **Engenharia Informática**
Curso de **Engenharia Civil**
Curso de **Engenharia da Qualidade**
Curso de **Arquitectura e Urbanismo**

Duração: 2 h
Tolerância: 30 min

Nota: Apresente todos os cálculos que efectuar, justificando devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular.

Utilize sempre matrizes na resolução de sistemas de equações lineares, a não ser que no enunciado lhe seja pedido outro método.

Escreva em FOLHAS SEPARADAS conforme o Grupo.

Grupo I

1. (3,5 valores) Utilizando exclusivamente o Teorema de Laplace, podendo contudo efectuar simplificações, calcule o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Grupo II

2. (5 valores) Se $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$ constituirem duas matrizes de 2×2, e definirmos o seguinte produto: $\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$, determine se se trata de um produto interno que deve obedecer às seguintes propriedades:

P1) Comutatividade,
P2) Distributividade em relação à soma,
P3) Associatividade em relação à multiplicação por um escalar,
P4) O produto interno entre o mesmo vector é sempre maior ou igual a zero e só é nulo quando se trata do vector nulo.

Grupo III

3. (5,5 valores) Determine a equação reduzida e o género da cónica: $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4y + 5 = 0$.

Grupo IV

4. Dados os vectores $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,1,0,0)$,

i) (1 valor) Verifique se os vectores são linearmente independentes;

ii) (1,5 valores) Seja o vector genérico $\mathbf{v}_4 = (x, y, z, w)$, determine as restrições impostas a *x*, *y*, *z* e *w*, de modo a que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$, sejam linearmente independentes;

iii) (0,5 valores) Com base nas restrições anteriores determine um vector concreto $\mathbf{v}_5$, que seja linearmente independente dos vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

5. Seja T um operador linear no espaço $\Re^2$, definido por $T(z, w) = (4z - 2w, 2z + w)$. Calcule:

i) (1,5 valores) A matriz associada a T na base $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1), (-1,0)\}$

ii) (1,5 valores) As matrizes mudança de base da base A para a base $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$ e da base C para a base A