Universidade Fernando Pessoa

Departamento de **Ciências e Tecnologia**

Exame Recurso **1997/07/21**

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Curso de **Engenharia do Ambiente -** 1º ano
Curso de **Engenharia da Comunicação -** 1º ano
Curso de **Engenharia das Construções Civis -** 1º ano
Curso de **Engenharia da Qualidade -** 1º ano

Duração: 2 horas

Nota: Apresente <u>todos</u> os cálculos que efectuar.

I. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 - kx_2 - k^2x_3 = k \\ kx_1 - k^2x_2 + kx_3 = 1 \\ kx_1 + x_2 + k^3x_3 = 1 \end{cases}$$

A. Resolva este sistema utilizando o método de Gauss.

B. Resolva este sistema utilizando a regra de Cramer.

C. Diga em que condições este sistema é:

1. possível e determinado

2. possível e indeterminado

3. impossível

II. Considere os vectores

$$\vec{v}_1 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{v}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{v}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

em que $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são os vectores da base canónica de $\Re^3$.

A. Mostre que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ formam uma base de $\Re^3$.

B. Escreva $\vec{u} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ nessa base.

III. Considere a seguinte transformação

$$T : \Re^3 \to \Re^3 \ , \ T(\vec{u}) = \vec{m}(\vec{u} \cdot \vec{n})$$

sendo $\vec{m} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ e $\vec{n} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$.

A. Mostre que T é linear.

B. Determine a sua matriz associada.

IV. Calcule o seguinte determinante sem utilizar a regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} c+b & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

V. Dado um espaço vectorial E e uma base $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, deduza as fórmulas que lhe permitem obter a base ortogonal $S' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ a partir de *S*.

VI. Considere a seguinte cónica:

$$x^2 + y^2 + xy + 5\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 1 = 0$$

A. Determine a sua equação reduzida e classifique a cónica.

B. Prove que a base formada pelos vectores próprios unitários da matriz *A* é ortogonal.

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca