Universidade Fernando Pessoa
Departamento de Ciência e Tecnologia

Apontamentos

de

ÁLGEBRA LINEAR
E
GEOMETRIA ANALÍTICA

Maria Alzira Pimenta Dinis

1998

Índice

Capítulo I

MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Capítulo I

Ao trabalhar com um sistema de equações lineares, somente os coeficientes e suas respectivas posições são importantes. Ao reduzir o sistema à forma escalonada, é essencial manter as equações cuidadosamente alinhadas. Assim, esses coeficientes podem ser eficientemente arrumados numa disposição rectangular chamada *matriz*. A menos que se diga o contrário, todos os elementos das matrizes pertencem a algum corpo K, arbitrário mas fixo. Aos elementos de K chamamos *escalares*. Podemos supor, por exemplo, que K é o corpo real $\Re$ ou o corpo complexo C. Os elementos de $\Re^n$ ou $\mathbf{C}^n$ são representados por *vectores linha* ou *vectores coluna*, que são casos especiais de matrizes.

Matrizes.

Seja K um corpo arbitrário. Uma disposição regular da forma $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ onde os a_{ij} são escalares em K, é chamada matriz sobre K, ou simplesmente *matriz*, se K está implícito. A matriz acima é também notada por (a_{ij}), $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, ou simplesmente por (a_{ij}). As m n-uplas horizontais $(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}),(a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}),\ldots,(a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$ são as *linhas* da matriz, e as n m-uplas verticais $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ são as suas *colunas*. De notar que o elemento a_{ij}, chamado *elemento* ij ou *componente* ij aparece na i*-ésima linha* e j*-ésima coluna*. A matriz com m linhas e n colunas é chamada uma matriz do tipo m por n, $(m \times n)$; o par de números (m,n) é chamado o *tamanho* ou *forma*.

Exemplo – A matriz $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ é uma matrix 2 por 3. As suas linhas são $(1,-3,-4)$ e $(0,5,-2)$. As colunas são $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

As matrizes representam-se normalmente por maísculas $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\ldots$ e os elementos do corpo K por minúsculas $a, b, \ldots$. Duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são *iguais*, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, se têm a mesma forma e se os elementos correspondentes são iguais.

Exemplo – A igualdade $\begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ é equivalente ao seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2z+w=5 \\ z-w=4 \end{cases}$. A solução do sistema é $x=2$, $y=1$, $z=3$ e $w=-1$.

Uma matriz com uma linha é também chamada um vector linha, e com uma coluna, um vector coluna. Um elemento no corpo K pode ser considerado como uma matriz 1 por 1.

Adição de Matrizes e Multiplicação por um Escalar.

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes com o mesmo tipo, isto é, o mesmo número de linhas e colunas, digamos, matrizes $m \times n$: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$. A soma de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, é a matriz obtida adicionando os termos correspondentes: $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$. O produto de um escalar k pela matriz $\mathbf{A}$, $k\cdot\mathbf{A}$, ou simplesmente $k\mathbf{A}$, é a matriz obtida multiplicando cada elemento de $\mathbf{A}$ por k: $k\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$.

Observa-se que $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ e $k\mathbf{A}$ são também matrizes $m\times n$. Também se define $-\mathbf{A}=-1\cdot\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$. A soma de matrizes com tipos diferentes não é definida.

<u>Exemplo</u> – Sejam $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Então, $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-7 & 5+1 & -6+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $3\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-6) \end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -18 \end{pmatrix}$, $2\mathbf{A}-3\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -9 & 0 & -6 \\ 21 & -3 & -24 \end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{pmatrix}$

<u>Exemplo</u> – A matriz $m\times n$ cujos elementos são todos zero, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ é chamada *matriz nula*, sendo representada por 0. É semelhante ao escalar 0 no sentido de que para qualquer matriz $\mathbf{A}=(a_{ij})$ do tipo $m\times n$, $\mathbf{A}+0=(a_{ij}+0)=(a_{ij})=\mathbf{A}$.

As propriedades básicas das operações de adição e multiplicação por um escalar são as seguintes:

Teorema – Seja V o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ sobre um corpo K. Então, para quaisquer matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{V}$ e quaisquer escalares k_1, $k_2 \in K$,

(i) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

(ii) $\mathbf{A}+0=\mathbf{A}$

(iii) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=0$

(iv) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

(v) $k_1(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{B}$

(vi) $(k_1+k_2)\mathbf{A}=k_1\mathbf{A}+k_2\mathbf{A}$

(vii) $(k_1k_2)\mathbf{A}=k_1(k_2\mathbf{A})$

(viii) $1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$ e $0\mathbf{A}=0$

Usando (vi) e (viii), também se tem que $\mathbf{A}+\mathbf{A}=2\mathbf{A}$, $\mathbf{A}+\mathbf{A}+\mathbf{A}=3\mathbf{A}$, …

Multiplicação de Matrizes.

O produto das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, é um pouco mais complicado. Vejamos o seguinte:

(i) Sejam $\mathbf{A}=(a_i)$ e $\mathbf{B}=(b_i)$ pertencentes a $\Re^n$, $\mathbf{A}$ representado por um vector linha e $\mathbf{B}$ por um vector coluna. Então o produto interno $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ pode ser encontrado combinando as matrizes como se segue: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=$

$$=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

definindo a matriz produto de um vector linha $\mathbf{A}$ por um vector coluna $\mathbf{B}$.

(ii) Consideremos as equações $\begin{matrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = y_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = y_2 \end{matrix}$. O sistema é equivalente à equação matricial $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ou simplesmente $\mathbf{B}X=$

$$=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1X \\ \mathbf{B}_2X \end{pmatrix}$$

onde $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ são as linhas de $\mathbf{B}$. De notar que o produto de uma matriz por um vector coluna produz outro vector coluna.

(iii) Consideremos agora as equações $\begin{matrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = z_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = z_2 \end{matrix}$ que já sabemos poder representar por $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ou simplesmente $\mathbf{A}Y = Z$, onde $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $Y = (y_i)$ e $Z = (z_i)$. Substituindo os valores de y_1 e y_2 de (ii) nas equações de (iii), tem-se:
$\begin{matrix} a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) + a_{12}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3) = z_1 \\ a_{21}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) + a_{22}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3) = z_2 \end{matrix}$ ou, reagrupando os termos, $\begin{matrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2 + (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23})x_3 = z_1 \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2 + (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23})x_3 = z_2 \end{matrix}$. Por outro lado, usando a equação matricial $\mathbf{B}X = Y$ e substituindo Y em $\mathbf{A}Y = Z$, obtém-se $\mathbf{AB}X = Z$, que representará o sistema obtido se definirmos o produto de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ como se segue: $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times$

$$\times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}^1 & \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}^2 & \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}^3 \\ \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}^1 & \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}^2 & \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}^3 \end{pmatrix}$ onde $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ são as linhas de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}^1$, $\mathbf{B}^2$ e $\mathbf{B}^3$ são as colunas de $\mathbf{B}$. O principal requisito é que o *número de colunas de* $\mathbf{A}$ *seja igual ao número de linhas de* $\mathbf{B}$.

Definição – Suponhamos que $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$ são matrizes tais que o número de colunas de $\mathbf{A}$ é igual ao número de linhas de $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times p$ e $\mathbf{B}$ uma matriz $p \times n$. Então o produto $\mathbf{AB}$ é uma matriz $m \times n$ cujo elemento ij é obtido multiplicando a i-ésima linha $\mathbf{A}_i$ pela j-ésima coluna $\mathbf{B}^j$ de $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{B}^1 & \mathbf{A}_1\cdot\mathbf{B}^2 & \cdots & \mathbf{A}_1\cdot\mathbf{B}^n\\ \mathbf{A}_2\cdot\mathbf{B}^1 & \mathbf{A}_2\cdot\mathbf{B}^2 & \cdots & \mathbf{A}_2\cdot\mathbf{B}^n\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \mathbf{A}_m\cdot\mathbf{B}^1 & \mathbf{A}_m\cdot\mathbf{B}^2 & \cdots & \mathbf{A}_m\cdot\mathbf{B}^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1p}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{i1} & \cdots & a_{ip}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{m1} & \cdots & a_{mp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n}\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot\\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \cdot & \boxed{c_{ij}} & \cdot\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}$$ onde $c_{ij}=a_{i1}b_{ij}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$. Acentue-se que se $\mathbf{A}$ é uma matriz $m\times p$ e $\mathbf{B}$ uma matriz $q\times n$, onde $p\neq q$, o produto $\mathbf{AB}$ não é definido.

<u>Exemplo</u> - $\begin{pmatrix}r & s\\ t & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ra_1+sb_1 & ra_2+sb_2 & ra_3+sb_3\\ ta_1+ub_1 & ta_2+ub_2 & ta_3+ub_3\end{pmatrix}$.

<u>Exemplo</u> - $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot2\\ 3\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot1+4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 11\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot3 & 1\cdot2+1\cdot4\\ 0\cdot1+2\cdot3 & 0\cdot2+2\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}$. Este exemplo mostra que a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, os produtos $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ não são *necessariamente* iguais.

A multiplicação de matrizes satisfaz as seguintes propriedades:

<u>Teorema</u> – (i) $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$, (lei associativa)

(ii) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$, (lei distributiva à esquerda)

(iii) $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}+\mathbf{CA}$, (lei distributiva à direita)

(iv) $k(\mathbf{AB})=(k\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(k\mathbf{B})$, onde k é um escalar

Observe-se que $0\mathbf{A}=0$ e $\mathbf{B}0=0$, onde 0 é a matriz nula.

Transposta.

A transposta de uma matriz $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, é a matriz obtida escrevendo as linhas de $\mathbf{A}$, ordenadamente como colunas: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Observe-se que, se $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$, então $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ é $n \times m$.

<u>Exemplo</u> - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

A operação transposição de matrizes satisfaz as propriedades seguintes:

<u>Teorema</u> - (i) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$

(ii) $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$

(iii) $(k\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = k\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, onde k é um escalar

(iv) $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

O sistema de equações lineares $\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad \cdots \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$ é equivalente à equação matricial $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$ ou simplesmente $\mathbf{A}X = \mathbf{B}$, onde $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $X = (x_i)$ e $\mathbf{B} = (b_i)$. O sistema homogéneo associado é equivalente a $\mathbf{A}X = 0$. A matriz $\mathbf{A}$ é chamada a *matriz dos coeficientes do sistema*, e a matriz seguinte $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ é chamada *matriz completa* ou *matriz aumentada* do sistema. A matriz aumentada permite determinar completamente o sistema.

Exemplo – A matriz dos coeficientes e a matriz aumentada do sistema $\begin{matrix} 2x+3y-4z=7 \\ x-2y-5z=3 \end{matrix}$ são as seguintes matrizes, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, sendo o sistema equivalente à equação matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Matrizes Escalonadas.

Uma matriz $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right)$ é uma *matriz escalonada*, ou diz-se que está na forma escalonada, se o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta linha por linha até que sobrem somente linhas nulas, isto é, se existem elementos não nulos $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$, onde $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ com a propriedade $a_{ij} = 0$ para $i \le r$, $j \le j_i$, e para $i > r$. Chama-se a $a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r}$ os *elementos distintos* da matriz $\mathbf{A}$.

Exemplo – Nas matrizes escalonadas seguintes, os elementos distintos foram circundados: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Uma matriz escalonada é chamada *matriz escalonada reduzida por linhas*. Se os elementos distintos são: (i) os únicos elementos não nulos nas suas respectivas colunas.

(ii) iguais a 1.

A terceira matriz do exemplo anterior é um exemplo de uma matriz escalonada reduzida por linhas, as outras não. A matriz zero, 0, é sempre uma matriz escalonada reduzida por linhas.

Equivalência por Linhas e Operações Elementares com Linhas.

Diz-se que uma matriz $\mathbf{A}$ é *equivalente por linhas* a uma matriz $\mathbf{B}$ se $\mathbf{B}$ pode ser obtida de $\mathbf{A}$ por uma sequência finita das seguintes operações chamadas *operações elementares com linhas*:

[E1] Troca das $i-ésima$ e j-ésima linhas entre si: $\mathbf{R}_i \leftrightarrow \mathbf{R}_j$;

[E2] Multiplicação da i-ésima linha por um escalar k não nulo: $\mathbf{R}_i \leftrightarrow k\mathbf{R}_j$, $k \neq 0$;

[E3] Substituição da i-ésima linha por k vezes a j-ésima linha mais a i-ésima linha: $\mathbf{R}_i \leftrightarrow k\mathbf{R}_j + \mathbf{R}_i$.

<u>Exemplo</u> – A matriz seguinte é reduzida por linhas à forma escalonada aplicando as operações: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Para anular o 2, multiplicou-se a primeira linha por –2 e somou-se com a 2ª. Fez-se o mesmo para a 3ª, mas agora multiplicou-se a 1ª por –3. Para anular o 5 multiplicou-se a 2ª linha por –5 adicionando à 3ª, multiplicada por 4.

<u>Exemplo</u> – Na matriz seguinte foram aplicadas as operações:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 5/2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 5/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 5/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

assim obtendo-se a *forma canónica por linhas* de $\mathbf{A}$.

Matrizes Quadradas.

Uma matriz com o mesmo número de linhas e colunas é chamada *matriz quadrada*. Diz-se que uma matriz quadrada com n linhas e n colunas é de *ordem* n. A *diagonal* - ou *diagonal principal* – da matriz quadrada de ordem $n\mathbf{A} = (a_{ij})$ consiste nos elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Exemplo – A matriz seguinte é quadrada de ordem 3: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Os elementos da diagonal principal são 1, 5, 9.

Uma *matriz triangular superior* ou simplesmente uma *matriz triangular* é uma matriz quadrada cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & . \\ & & & a_{mn} \end{pmatrix}$. Semelhantemente, uma *matriz triangular inferior* é uma matriz quadrada cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Uma *matriz diagonal* é uma matriz quadrada cujos elementos não diagonais são todos nulos: $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$.

Em particular, a matriz quadrada $m \times n$ com 1's na diagonal e 0´s no restante, representada por $\mathbf{I}_n$, ou simplesmente por $\mathbf{I}$, é chamada *matriz unidade* ou *identidade*; por exemplo $\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A matriz $\mathbf{I}$ é semelhante ao escalar 1, no sentido de que, para qualquer matriz quadrada $\mathbf{A}$, de ordem n, $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$. A matriz $k\mathbf{I}$, para um escalar $k \in K$, é chamada *matriz escalar*; é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são iguais a k. Uma *matriz simétrica* é do tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Matrizes Inversíveis.

Diz-se que uma matriz quadrada é *inversível* se existe uma matriz $\mathbf{B}$ com a propriedade $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Tal matriz $\mathbf{B}$ é única; porque as igualdades $\mathbf{AB}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{AB}_2 = \mathbf{B}_2\mathbf{A} = \mathbf{I}$ implicam que $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1\mathbf{I} =$ $= \mathbf{B}_1(\mathbf{AB}_2) = (\mathbf{B}_1\mathbf{A})\mathbf{B}_2 = \mathbf{IB}_2 = \mathbf{B}_2$. Chama-se tal matriz $\mathbf{B}$ a *inversa* de $\mathbf{A}$ e nota-se $\mathbf{A}^{-1}$. Se $\mathbf{B}$ é inversa de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ também é inversa de $\mathbf{B}$.

<u>Exemplo</u> - $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Assim, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ são inversíveis e são inversas uma da outra, bastando verificar apenas um dos produtos.

<u>Exemplo</u> - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O cálculo da inversa pode ser feito de duas formas mais comuns. A primeira consiste em justapor à matriz dos coeficientes a matriz identidade ou unidade, por forma a obter primeiro a matriz identidade e a seguir a matriz inversa. Isto é, $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}) \rightarrow (\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1})$ através das operações normais.

<u>Exemplo</u> - $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&4\\6&1&0\\-1&2&-10\end{pmatrix}$. Então $\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&1&4&1&0&0\\6&1&0&0&1&0\\-1&2&-10&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}&0&0\\6&1&0&0&1&0\\-1&2&-10&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}&0&0\\0&-2&-12&-3&1&0\\0&\frac{5}{2}&-8&\frac{1}{2}&0&1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cc}1&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&6&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{5}{2}&-8&\frac{1}{2}&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&6&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-23&-\frac{13}{4}&\frac{5}{4}&1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cc}1&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&6&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{13}{92}&-\frac{5}{92}&-\frac{1}{23}\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&\frac{15}{23}&-\frac{4}{23}&\frac{6}{23}\\0&0&1&\frac{13}{92}&-\frac{5}{92}&-\frac{1}{23}\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc:cc}1&\frac{1}{2}&0&\frac{5}{23}&\frac{5}{46}&\frac{2}{23}\\0&1&0&\frac{15}{23}&-\frac{4}{23}&\frac{6}{23}\\0&0&1&\frac{13}{92}&-\frac{5}{92}&-\frac{1}{23}\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-\frac{5}{46}&\frac{9}{46}&-\frac{1}{23}\\0&1&0&\frac{15}{23}&-\frac{4}{23}&\frac{6}{23}\\0&0&1&\frac{13}{92}&-\frac{5}{92}&-\frac{1}{23}\end{array}\right).$$

Assim, $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{46}&\frac{9}{46}&-\frac{1}{23}\\\frac{15}{23}&-\frac{4}{23}&\frac{6}{23}\\\frac{13}{92}&-\frac{5}{92}&-\frac{1}{23}\end{pmatrix}$.

O outro modo de calcular a inversa duma matriz compreende vários passos. Primeiro calcula-se a transposta da matriz. Em seguida forma-se a matriz dos *cofactores* da matriz $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Um cofactor calcula-se escolhendo um elemento de uma matriz e multiplicando –1, elevado ao número da linha mais o número da coluna do elemento escolhido, pelo determinante que resulta subtraindo a linha e a coluna em que esse elemento se insere. Obtém-se assim a *matriz adjunta* de $\mathbf{A}$. De seguida multiplica-se $\frac{1}{\det\mathbf{A}}$ pela $\mathrm{Adj}\,\mathbf{A}$, obtendo-se $\mathbf{A}^{-1}$.

<u>Exemplo</u> - $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 1\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-3$,

$C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=3$, $C_{13}=3$, $C_{21}=10$, $C_{22}=2$, $C_{23}=-4$, $C_{31}=-1$, $C_{32}=7$,

$C_{33}=-5$. $\operatorname{Adj}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 3\\ 10 & 2 & -4\\ -1 & 7 & -5\end{pmatrix}$, $\det\mathbf{A}=18$ e portanto $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{18}\operatorname{Adj}\mathbf{A}=$

$$=\begin{pmatrix}-1/6 & 1/6 & 1/6\\ 5/9 & 1/9 & -2/9\\ -1/18 & 7/18 & -5/18\end{pmatrix}.$$

Nota – O determinante $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1\times(-2)-1\times 1=-3$, multiplicando a diagonal principal pelo simétrico da outra diagonal.

O método que vimos neste último exemplo será melhor compreendido quando estudarmos os determinantes.

Método de Gauss-Jordan para Resolução de Sistemas de Equações Lineares.

A resolução de sistemas de equações lineares é um problema central em *Álgebra Linear*. O método de eliminação de *Gauss* é um método de resolução simples que aplica o método de substituição na parte final. Vejamos um exemplo:

<u>Exemplo</u> – Considere-se o sistema $\begin{aligned}2x+\ y+\ 4z &= 2\\ 6x+\ y \qquad &= -10\\ -x+2y-10z &= -4\end{aligned}$. Pretende-se aplicar o método de eliminação de Gauss para obter os valores das incógnitas x, y e z.

Começa-se por subtrair múltiplos da primeira equação às restantes por forma a eliminar a incógnita x dessas equações. Para isso multiplica-se a primeira equação por 3 e subtrai-se o resultado à segunda, e multiplica-se a primeira equação por $-\dfrac{1}{2}$ e subtrai-se o resultado à terceira: $\begin{aligned} 2x + \ y + \ 4z &= \ \ \ 2 \\ -2y - 12z &= -16 \\ \tfrac{5}{2}y - 8z &= \ -3 \end{aligned}$. Chama-se *pivot* deste primeiro passo de eliminação ao coeficiente 2 da incógnita x na primeira equação. No segundo passo de eliminação subtrai-se à terceira equação um múltiplo da segunda de forma a eliminar a incógnita y da terceira equação. Para isso multiplica-se a segunda equação por $-\frac{5}{4}$ e subtrai-se o resultado à terceira. O pivot neste segundo passo de eliminação é o coeficiente –2 da incógnita y na segunda equação: $\begin{aligned} 2x + \ y + \ 4z &= \ \ \ 2 \\ -2y - 12z &= -16 \\ -23z &= -23 \end{aligned}$. Tendo conseguido eliminar tudo o que está para baixo da diagonal principal, termina aqui o processo de eliminação. O método prossegue com a resolução do sistema da última para a primeira equação substituindo os valores entretanto determinados: $z = \frac{-23}{-23} =$ $= 1 \Rightarrow -2y - 12 \times 1 = -16 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow 2x + 2 + 4 \times 1 = 2 \Leftrightarrow x = -2$.

É fácil ver como se pode tentar aplicar o método a outros sistemas de n equações lineares a n incógnitas. Primeiro elimina-se a primeira incógnita de todas as equações excepto da primeira, anulando todos os coeficientes debaixo do primeiro pivot. Depois anulam-se os coeficientes por baixo do segundo pivot de forma a eliminar a segunda incógnita de todas as equações excepto das duas primeiras. Procede-se analogamente em passos seguintes tomando-se para pivot da equação k o coeficiente que multiplica a incógnita k, até chegar à última equação, altura em que o processo de eliminação termina. Inicia-se então a determinação dos valores das incógnitas, por substituição. É claro que tudo se torna mais fácil se usarmos matrizes: $\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & -10 \\ -1 & 2 & -10 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -12 & -16 \\ 0 & 5/2 & -8 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -12 & -16 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{array}\right)$, em que a última coluna representa os termos independentes.

Se em vez do método de eliminação de Gauss quisermos usar o *método de eliminação de Gauss-Jordan* o processo é semelhante ao anterior mas pretende-se anular também o que se encontra acima da diagonal principal, reduzindo a matriz do sistema à matriz unidade e sendo a determinação das incógnitas imediata.

Exemplo – Gauss-Jordan: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & -10 \\ -1 & 2 & -10 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & -10 \\ -1 & 2 & -10 & -4 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -12 & -16 \\ 0 & 5/2 & -8 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 5/2 & -8 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow x = -2,\ y = 2,\ z = 1.$$

Existe um terceiro método, o *método de substituição*, que é um bom método para sistemas de duas equações a duas incógnitas ou três equações a três incógnitas mas complica-se para sistemas de maior dimensão. Consiste em obter uma incógnita em função das restantes e ir substituindo.

Exemplo - $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + z = 3 \\ -y + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ y = 3 - z \\ -(3 - z) + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ -3 + z + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ z = \dfrac{6}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \times 1 - 2 = 1 \\ y = 3 - 2 = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Por vezes, é aconselhável trocar as linhas, em qualquer dos métodos acima para simplificar os cálculos.