Capítulo II

ESPAÇOS VECTORIAIS

Capítulo II

Consideremos um conjunto K no qual estão definidas, pelo menos, duas operações: a aditiva e a multiplicativa, simbolizadas, respectivamente, por $+$ e $\times$. O conjunto K será um corpo se:

1. $\forall a,b \in K, a+b \in K$
2. $a+b=b+a$ comutatividade
3. $(a+b)+c=a+(b+c)$ associatividade
4. $a+0=0+a=a$ 0 é o elemento nulo de K (zero)
5. $\forall a,b \in K, \exists a' \in K : a+a'=a'+a=0$ a' é o elemento oposto de a
6. $\forall a,b \in K, a\times b \in K$
7. $a\times b=b\times a$ comutatividade
8. $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ associatividade
9. $a\times 1=1\times a=a$ 1 é o elemento unidade de K
10. $\forall a,b \neq 0 \in K, a\times b^{-1} \in K$ (b^{-1} é o inverso de b, isto é $b\times b^{-1}=b^{-1}\times b=1$)
11. $(a\times b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$ distributividade

Facilmente se concluiria que o conjunto $\Re$ dos números reais – e também os conjuntos Q dos números racionais e C dos números complexos – é um corpo. Neste caso as operações $+$ e $\times$ são respectivamente, as adição e multiplicação aritméticas. O oposto de a é $a'=-a$ e o inverso de b é $b^{-1}=\dfrac{1}{b}$.

<u>Definição</u> – Dado o conjunto $\mathbf{V}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots\}$ e o corpo $\Re=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\}$ diz-se que $\mathbf{V}$ é um espaço vectorial sobre o corpo $\Re$ se:

A0= $\forall \mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}, \mathbf{v}_i+\mathbf{v}_j \in \mathbf{V}$

A1= $\mathbf{v}_i+\mathbf{v}_j=\mathbf{v}_j+\mathbf{v}_i$

A2= $(\mathbf{v}_i+\mathbf{v}_j)+\mathbf{v}_k=\mathbf{v}_i+(\mathbf{v}_j+\mathbf{v}_k)$

A3= $\mathbf{v}_i+0=0+\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_i$ (0 – elemento nulo de $\mathbf{V}$)

A4= $\forall \mathbf{v}_i, \exists \mathbf{v}'_i \in \mathbf{V} : \mathbf{v}_i+\mathbf{v}'_i=\mathbf{v}'_i+\mathbf{v}_i=0$ ($\mathbf{v}'_i$ - elemento oposto de $\mathbf{v}_i$)

B0= $\forall \alpha_i \in \Re$ e $\forall \mathbf{v}_j \in \mathbf{V}, \alpha_i \mathbf{v}_j \in \mathbf{V}$

B1= $\alpha_i(\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k) = \alpha_i \mathbf{v}_j + \alpha_i \mathbf{v}_k$

B2= $(\alpha_i + \alpha_j)\mathbf{v}_k = \alpha_i \mathbf{v}_k + \alpha_j \mathbf{v}_k$

B3= $(\alpha_i \alpha_j)\mathbf{v}_k = \alpha_i(\alpha_j \mathbf{v}_k)$

B4= $1\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$

Um dos conjuntos, já conhecidos, onde todos estes axiomas são satisfeitos é o conjunto dos vectores livres – quer no plano, quer no espaço. Daí que os elementos de qualquer *espaço vectorial* sejam designados por *vectores* – aos elementos do corpo chamamos escalares.

Exemplo – O conjunto $\mathbf{M}_{m,n}$ das matrizes do tipo $m \times n$ é um espaço vectorial sobre o corpo $\Re$. Com efeito:

- Sendo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m,n}$ também $\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m,n}$ por definição de adição de matrizes.
- Como se viu, a adição de matrizes é comutativa - $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ - e associativa - $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$.
- O elemento nulo de $\mathbf{M}_{m,n}$ é a matriz nula – que é representada por 0.
- $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m,n}, \exists \mathbf{A}' \in \mathbf{M}_{m,n} : \mathbf{A} + \mathbf{A}' = \mathbf{A}' + \mathbf{A} = 0$

  Sendo a_{ij} ($i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$) os elementos de $\mathbf{A}$, os elementos de $\mathbf{A}'$ serão $-a_{ij}$, os opostos de a_{ij}.
- Vimos, também, que $\forall \alpha \in \Re$ e $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m,n}$, também $\alpha\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m,n}$.
- $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$ como a seguir se demonstra:

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}\right) = \alpha\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11}+\alpha b_{11} & \cdots & \alpha a_{1n}+\alpha b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha a_{m1}+v b_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn}+\alpha b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \cdots & \alpha b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha b_{m1} & \cdots & \alpha b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

- $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$ e $(\alpha\beta)\mathbf{A}=\alpha(\beta\mathbf{A})$ (as demonstrações dos axiomas são análogas às anteriores)
- $\mathbf{IA}=\mathbf{A}$ como é evidente.

Propriedades Elementares dos Espaços Vectoriais.

As propriedades dos espaços vectoriais demonstram-se a partir dos 8 axiomas que constituem a sua definição:

1ª. - Em qualquer espaço vectorial existe um só elemento nulo.

2ª. - Em qualquer espaço vectorial cada elemento tem um só oposto.

3ª. - $\forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}, 0\mathbf{v}=0$ (veja-se que o zero do 1º membro $\in\Re$ e o do 2º membro $\in\mathbf{V}$)

4ª. - $\forall\alpha\in\Re, \alpha 0=0$ (ambos os zeros pertencem a $\mathbf{V}$)

5ª. - $\forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}, -\mathbf{v}=(-1)\mathbf{v}$

6ª. - $\forall\alpha\in\Re$ e $\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}, (-\alpha)\mathbf{v}=-(\alpha\mathbf{v})=\alpha(-\mathbf{v})$

7ª. - $\forall\alpha\neq 0\in\Re$ e $\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}, \alpha\mathbf{u}=\alpha\mathbf{v}\Rightarrow\mathbf{u}=\mathbf{v}$

8ª. - $\alpha\mathbf{v}=0\Rightarrow\alpha=0$ ou $\mathbf{v}=0$

9ª. - $\alpha\mathbf{v}=\beta\mathbf{v}\Rightarrow\alpha=\beta$ ou $\mathbf{v}=0$

Produto Cartesiano. O Espaço Vectorial $\Re^n$.

Sejam os conjuntos $\mathbf{A}=(a_1,a_2,\ldots)$ e $\mathbf{B}=(b_1,b_2,\ldots)$. Chama-se produto cartesiano de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ ($\mathbf{A}\times\mathbf{B}$) ao conjunto $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\{(a_i,b_j): a_i\in\mathbf{A} \text{ e } b_j\in\mathbf{B}\}$. Se $\mathbf{B}=\mathbf{A}$ tem-se o produto cartesiano $\mathbf{A}\times\mathbf{A}$ ou, como é normalmente representado, $\mathbf{A}^2$ sendo este representado por $\mathbf{A}^2=\{(a_i,b_j): a_i,b_j\in\mathbf{A}\}$. Generalizando teremos então $\mathbf{A}^n=\{(a_i^{\,1},a_i^{\,2},\ldots,a_i^{\,n}): a_i^{\,1},a_i^{\,2},\ldots,a_i^{\,n}\in\mathbf{A}\}$.

<u>Exemplo</u> – Sejam $\mathbf{A}=\{2,5\}$ e $\mathbf{B}=\{2,4,6\}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\{(2,2),(2,4),(2,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$, $\mathbf{B}\times\mathbf{A}=\{(2,4),(2,5),(4,2),(4,5),(6,2),(6,5)\}$, $\mathbf{A}^2=\{(2,2),(2,5),(5,2),(5,5)\}$. Note-se que o número de elementos de $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ é igual ao produto do número de elementos de $\mathbf{A}$ pelo número de elementos de $\mathbf{B}$.

Prova-se que o conjunto $\Re^n$ - $\Re$ é o conjunto dos números reais – é um espaço vectorial, desde que estejam definidas as operações: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) =$ $= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ e $\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$ com $\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \Re$ e $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \Re_n$.

Muitos dos conjuntos já conhecidos podem ser considerados conjuntos $\Re^n$. Vejamos alguns:

- O conjunto dos números complexos, $\mathbf{C} = \{a + b_i : a, b \in \Re\}$,
- o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a 1, $\mathbf{P}_1 = \{ax + b : a, b \in \Re\}$,

e

- o conjunto das matrizes do tipo 2×1, $\mathbf{M}_{21} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} : a, b \in \Re \right\}$,

por exemplo, são conjuntos $\Re^2$. Com efeito vejamos o que sucede com $\mathbf{P}_1$, já que com $\mathbf{C}$ e $\mathbf{M}_{21}$ se poderão tecer considerações análogas. Sendo p e p'' elementos de $\mathbf{P}_1$, com $p' = a'x + b'$ e $p'' = a''x + b''$ fácil é verificar que $p' + p'' =$ $= (a' + a'')x + (b' + b'')$ e $\alpha p' = (\alpha a')x + (\alpha b')$. Os mesmos resultados se podem obter com o mesmo procedimento: $(a'x + b') + (a''x + b'') = (a', b') + (a'', b'') =$ $= (a' + a'', b' + b'') = (a' + a'')x + (b' + b'')$ e $\alpha(a'x + b') = \alpha(a', b') = (\alpha a', \alpha b') =$ $= (\alpha a')x + (\alpha b')$.

Vejamos mais alguns conjuntos:

- O conjunto dos polinómios de graus menor ou igual a 2, $\mathbf{P}_2 = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \Re\}$,
- o conjunto dos vectores do espaço, $\mathbf{V}_3 = \{\vec{u} = (a, b, c) : a, b, c \in \Re\}$,

e

- o conjunto das matrizes do tipo 1×3, $\mathbf{M}_{13} = \{[a \quad b \quad c] : a, b, c \in \Re\}$,

são exemplos de conjuntos $\Re^3$.

- O conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a 3, $\mathbf{P}_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d : a, b, c, d \in \Re\}$,

e

- o conjunto das matrizes quadradas de 2ª ordem, $\mathbf{M}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \Re \right\}$, são conjuntos $\Re^4$.

Sub-espaços Vectoriais.

Seja $\mathbf{V}$ um espaço vectorial sobre $\Re$ e $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$. Diz-se que $\mathbf{A}$ é um *sub-espaço vectorial* de $\mathbf{V}$ se:

1. $\forall a, b \in \mathbf{A}, a + b \in \mathbf{A}$
2. $\forall \alpha \in \Re$ e $\forall a \in \mathbf{A}, \alpha a \in \mathbf{A}$

<u>Exemplo</u> – Verificar se os conjuntos $\mathbf{A} = \{(a, b, a + b) : a, b \in \Re\}$ e $\mathbf{X} = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$ são sub-espaços de $\Re^3$.

Note-se que tanto o conjunto $\mathbf{A}$ como o conjunto $\mathbf{X}$ estão contidos em $\Re^3$, já que qualquer elemento de cada um destes conjuntos é também elemento de $\Re^3$. Teremos de verificar se as condições que definem sub-espaço vectorial são aqui satisfeitas. Comecemos com o conjunto $\mathbf{A}$ e tomemos dois elementos genéricos deste conjunto: $(a_1, b_1, a_1 + b_1), (a_2, b_2, a_2 + b_2)$:

1. $(a_1, b_1, a_1 + b_1) + (a_2, b_2, a_2 + b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2))$,

   o elemento obtido pertence também a $\mathbf{A}$ já que satisfaz a definição de elemento deste conjunto – cada elemento de $\mathbf{A}$ é constituido por três números reais, o terceiro sendo a soma dos primeiros.
2. $\alpha(a_1, b_1, a_1 + b_1) = (\alpha a_1, \alpha b_1, \alpha a_1 + \alpha b_1)$,

   também este elemento pertence a $\mathbf{A}$ pelas razões invocadas em 1.. O conjunto $\mathbf{A}$ é, portanto, um sub-espaço de $\Re^3$. Passemos ao conjunto $\mathbf{X}$. Como os três números reais que definem os elementos deste conjunto estão interligados pela relação $x + y + z = 1$, ou seja, $z = 1 - x - y$, o conjunto pode ser descrito da seguinte forma: $\mathbf{X} = \{(x, y, 1 - x - y) : x, y \in \Re\}$. Procedendo como no exemplo anterior, teríamos assim $(x_1, y_1, 1 - x_1 + y_1) + (x_2, y_2, 1 - x_2 + y_2) = = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2 - (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))$ o que nos leva a concluir que o elemento obtido não pertence a $\mathbf{X}$, pois o terceiro número que o constitui não é igual a $1-(x_1+x_2)-(y_1+y_2)$. O conjunto $\mathbf{X}$ não é, portanto, um sub-espaço de $\Re^3$.

Combinação Linear de Vectores. Geradores de um Espaço Vectorial.

Dizemos que um vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é *combinação linear* dos vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$ se existirem os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Re$ - coeficientes da combinação linear – tais que $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k$.

<u>Exemplo</u> – O vector $\mathbf{v} = (6,-5,3)$ de $\Re^3$ é combinação linear dos vectores $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$. Com efeito, bastará tomar $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = -5$, $\alpha_3 = 3$ para que se possa escrever $\mathbf{v} = 6\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$. É evidente que qualquer vector $\mathbf{v} \in \Re^3$ é combinação linear daqueles três vectores, pois $\mathbf{v} = (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$ ($\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $\alpha_3 = z$).

Diremos que os vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$ *geram* – ou são *geradores* – do espaço vectorial $\mathbf{V}$ se qualquer vector deste espaço vectorial for combinação linear daqueles k vectores, isto é, se $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \Re : \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k$. Como se conclui do exemplo anterior os vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ geram $\Re^3$.

<u>Exemplo</u> – Verificar se os vectores $\mathbf{v}_1 = (2,1,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (2,3,-2)$ geram $\Re^3$.

Tomemos o vector genérico $\mathbf{v} = (x,y,z)$ e façamos $(x,y,z) = \alpha_1(2,1,-1) + \alpha_2(-2,1,0) + \alpha_3(2,3,-2)$. Verifiquemos se quaisquer que sejam x, y, z existem sempre escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tais que a relação anterior seja verdadeira. Obtemos: $(x,y,z) = (2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3, -\alpha_1 - 2\alpha_3)$, ou seja, $\begin{cases} 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = y \\ -\alpha_1 - \alpha_3 = z \end{cases}$. Resolvamos o sistema: $\updownarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 2 & x \\ 1 & 1 & 3 & y \\ -1 & 0 & -2 & z \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 3 & y \\ 2 & -2 & 2 & x \\ -1 & 0 & -2 & z \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 3 & y \\ 0 & -4 & -4 & x-2y \\ 0 & 1 & 1 & z+y \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 3 & y \\ 0 & -4 & -4 & x-2y \\ 0 & 0 & 0 & z+2y+4z \end{array}\right).$$

Conclui-se que o sistema só é possível para $x+2y+4z=0$, caso contrário não existirão $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ que satisfaçam o sistema e consequentemente a relação $(x,y,z)=$ $=\alpha_1(2,1,-1)+\alpha_2(-2,1,0)+\alpha_3(2,3,-2)$. Nem todos os vectores de $\Re^3$ são, portanto, combinação linear dos vectores dados. Estes não geram $\Re^3$.

Dependência e Independência Lineares.

Diz-se que os vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\in\mathbf{V}$ são *linearmente independentes* se $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k=0\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$. Se esta igualdade subsistir para $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ *não todos nulos*, os vectores serão *linearmente dependentes*.

<u>Exemplo</u> – Os vectores $\mathbf{v}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{v}_2=(0,1,0)$, $\mathbf{v}_3=(0,0,1)$ são linearmente independentes. Para o verificar escreve-se $\underset{\uparrow}{\alpha_1}(1,0,0)+\underset{\Uparrow}{\alpha_2}(0,1,0)+\underset{\uparrow\uparrow\uparrow}{\alpha_3}(0,0,1)=(0,0,0)$.

Então

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \downarrow & \Downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}\Leftrightarrow\alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=0.$$

<u>Teorema</u> **–** Os vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\in\mathbf{V}$ são linearmente dependentes, se e só se um deles for combinação linear de todos os outros.

<u>Demonstração</u> **–** Se $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ são linearmente dependentes, então, a relação $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k=0$ é possível, também, para $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ não todos nulos. Supondo que se poderá considerar $\alpha_i\neq 0$. Neste caso, a partir da equação anterior podemos obter sucessivamente: $\alpha_i\mathbf{v}_i=-\alpha_1\mathbf{v}_1-\alpha_2\mathbf{v}_2-\cdots-\alpha_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}-\alpha_{i+1}\mathbf{v}_{i+1}-$ $-\cdots-\alpha_k\mathbf{v}_k$, $\quad\mathbf{v}_i=\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right)\mathbf{v}_1+\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_i}\right)\mathbf{v}_2+\cdots+\left(-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right)\mathbf{v}_{i-1}+\left(-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right)\mathbf{v}_{i+1}+\cdots+$

$+\left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_i}\right)\mathbf{v}_k$. Como $\alpha_i \neq 0$, $-\frac{\alpha_1}{\alpha_i},-\frac{\alpha_2}{\alpha_i},\cdots,-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i},-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i},\cdots,-\frac{\alpha_k}{\alpha_i}$ são números reais e, daí, o vector $\mathbf{v}_i$ ser combinação linear de todos os outros. Reciprocamente, se $\mathbf{v}$ for combinação linear dos vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$, sabe-se que $\exists \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k \in \Re$ tais que $\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k$. Adicionando a ambos os membros desta igualdade o opsoto de $\mathbf{v}$, obtém-se $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=0=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k+(-\mathbf{v})$ o que prova que estes $k+1$ vectores são linearmente dependentes já que aquela igualdade é possível existindo um coeficiente não nulo: o último coeficiente é igual a (-1).

<u>Teorema</u> – Se os vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ são linearmente independentes e se $\mathbf{v}$ não é combinação linear de $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$, então $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}$ são, também, linearmente independentes. Este teorema pode ser demonstrado pelo método de redução ao absurdo.

<u>Demonstração</u> – Suponhamos que $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ são linearmente dependentes. Então a relação $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k+\alpha\mathbf{v}=0$ seria possível para $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,\alpha$ não todos nulos. É evidente que α tem que ser um destes porque se tal não acontecesse, $\alpha\mathbf{v}=0$ e a relação anterior reduzir-se-ia a $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k=0$ mantendo a condição de $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ não serem todos nulos. Isto vai contra uma das hipóteses do teorema, a qual diz que $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ são linearmente independentes. Se, pelo contrário, puder ser $\alpha\neq 0$, a relação $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{v}_k+\alpha\mathbf{v}=0$ leva, sucessivamente, a $\alpha\mathbf{v}=-\alpha_1\mathbf{v}_1-\alpha_2\mathbf{v}_2-\cdots-\alpha_k\mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}=\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)\mathbf{v}_1+\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)\mathbf{v}_2+\cdots+$ $+\left(-\frac{\alpha_k}{\alpha}\right)\mathbf{v}_k$ donde concluir-se-ia que $\mathbf{v}$ era combinaçãolinear de $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k$ o que contradiz a outra hipótese. Os vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}$ não podem ser linearmente dependentes mas sim independentes.

Base e Dimensão.

Os vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$ formam uma *base* do espaço vectorial $\mathbf{V}$ se:

B1 - gerarem $\mathbf{V}$,

B2 - forem linearmente independentes.

Os vectores $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ que geram $\mathbf{V}$ - qualquer vector de $\mathbf{V}$ pode ser escrito como combinação linear destes – e são linearmente independentes como se viu, formam uma base de $\Re^3$. É a chamada *base canónica* de $\Re^3$. Do mesmo modo $\{(1,0),(0,1)\}$ é a base canónica de $\Re^2$. $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ é a base canónica de $\Re^4$, etc.

<u>Exemplo</u> – Verificar se os vectores $(1,2,1),(-1,-1,0),(3,1,-1)$ formam uma base de $\Re^3$.

B1 - Os vectores dados devem gerar $\Re^3$, isto é, qualquer que seja $(x,y,z) \in \Re^3$ devem existir $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Re$, tais que a relação $(x,y,z) =$ $= \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(-1,-1,0) + \alpha_3(3,1,-1)$ se verifique, o que equivale a $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = x \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = y \\ \alpha_1 \quad - \alpha_3 = z \end{cases}$. Resolvendo a equação: $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -3 & x \\ 2 & -1 & 1 & y \\ 1 & 0 & -1 & z \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -3 & x \\ 0 & 1 & -5 & y-2x \\ 0 & 0 & -4 & z-x \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -3 & x \\ 0 & 1 & -5 & y-2x \\ 0 & 0 & 1 & x-y+z \end{array}\right).$$

O sistema é sempre possível, quaisquer que sejam x, y, z, o que significa que existem sempre $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que satisfazem a relação.

B2 - Os vectores são linearmente independentes. Na verdade, a igualdade: $\alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(-1,-1,0) + \alpha_3(3,1,-1) = (0,0,0)$ permite obter o sistema $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 \quad - \alpha_3 = 0 \end{cases}$ que só difere nos termos independentes, agora todos nulos. A condensação da matriz, à semelhança da anterior, resulta na matriz

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ o que prova que o sistema é possível e determinado, existindo apenas a solução nula: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Assim, os três vectores são linearmente independentes e, atendendo, também a B1, formam uma base de $\Re^3$.

Teorema – Todas as bases de um dado espaço vectorial têm o mesmo número de elementos.

Demonstração – Consideremos duas bases de um dado espaço vectorial e vamos supor que o número de vectores de cada uma delas é, respectivamente, n e m, com $n \neq m$. Admitamos que $n > m$. Representemos a primeira base por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e a segunda por $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$. Como qualquer vector de um espaço vectorial $\mathbf{V}$ é combinação linear dos vectores de uma qualquer base de $\mathbf{V}$ - por definição de base – podemos escrever: $\begin{array}{l} \mathbf{v}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{u}_m \\ \mathbf{v}_2 = a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{u}_m \\ \quad . \qquad . \qquad . \quad \cdots \quad . \\ \mathbf{v}_n = a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{u}_m \end{array}$ sendo a_{ij} ($i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$) os coeficientes das n combinações lineares.

Façamos agora $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n = 0$ se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ formam uma base de $\mathbf{V}$, têm que ser linearmente independentes, o que não acontece. Vejamos, das igualdades anteriores obtém-se: $\alpha_1\left(a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{u}_m\right) + $ $+ \alpha_2\left(a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{u}_m\right) + \cdots + \alpha_n\left(a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{u}_m\right) = 0$, isto é: tem-se assim $\left(\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_n a_{1n}\right)\mathbf{u}_1 + \left(\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_n a_{2n}\right)\mathbf{u}_2 + \cdots +$ $+ \left(\alpha_1 a_{m1} + \alpha_2 a_{m2} + \cdots + \alpha_n a_{mn}\right)\mathbf{u}_m = 0$. Como $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ formam uma base de $\mathbf{V}$ eles são linearmente independentes e, daí, temos: $\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \quad . \qquad . \qquad \cdots \quad . \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = 0 \end{cases}$.

Um sistema homogéneo - termos independentes todos nulos – é sempre possível, mas neste caso é indeterminado, pois tendo nós admitido no início ser $n > m$, o número de colunas é maior que o número de linhas e há incógnitas definidas à custa de outras não determinadas.

Exemplo - $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Então $\begin{array}{l} z+t=0 \Leftrightarrow z=-t \\ y+z+t=0 \Leftrightarrow y=-z-t=-(-t)-t=0 \\ x+y+z+t=0 \Leftrightarrow x+0=0 \Leftrightarrow x=0 \end{array}$.

Significa então que além da solução nula, $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$, existem também soluções não nulas o que prova que a relação $\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n=0$ é verdadeira para $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ não todos nulos. Os vectores $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_m$ não são linearmente independentes e, por isso, não formam uma base de $\mathbf{V}$. Se $m>n$, far-se-ia uma demonstração análoga, só que representaríamos os vectores $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_m$ como combinação linear de $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ - admitindo que estes vectores formavam uma base de $\mathbf{V}$. Sendo assim, nem podemos ter $m>n$, nem $m<n$. As duas bases terão o mesmo número de vectores.

Chama-se *dimensão* de um espaço vectorial $\mathbf{V}$ ao número de vectores de uma base qualquer de $\mathbf{V}$. Se este número é igual a n, escreve-se $\dim\mathbf{V}=n$.
Como os vectores $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ formam uma base de $\Re^3$, qualquer base de $\Re^3$ terá sempre três vectores, e $\dim\Re^3=3$.

Construção de Uma Base.

A construção de uma base pode fazer-se vector a vector, atendendo ao penúltimo teorema e a que qualquer vector não nulo é linearmente independente $\rightarrow$ se $u\neq 0$, $\alpha v=0 \Rightarrow \alpha=0$, pela oitava propriedade dos espaços vectoriais.

Exemplo – Construa uma base do espaço vectorial $\mathbf{V}=\{(x,y,x+y):x,y\in\Re\}$.

Qualquer vector não nulo de $\mathbf{V}$, por exemplo $(1,0,1)$ satisfaz a 2ª condição de definição de base. Vejamos agora se verifica a 1ª condição, isto é, se gera $\mathbf{V}$. Para isso, quaisquer que fossem x, y, deveria existir um $\alpha_1 \in \Re$, tal que $(x, y, x+y) = \alpha_1(1,0,1)$, ou seja: $\begin{cases} \alpha_1 = x \\ 0 = y \\ \alpha_1 = x+y \end{cases}$. É evidente que não há qualquer α_1 que satisfaça o sistema anterior quando o vector $(x, y, x+y) \in \mathbf{V}$ é tal que $y \neq 0$. Assim, nem todos os vectores de $\mathbf{V}$ são combinação linear de $(1,0,1)$ e, portanto, este vector não constitui uma base de $\mathbf{V}$. Um dos vectores que não é combinação linear de $(1,0,1)$ é, por exemplo, $(0,1,1) \rightarrow y = 1 \neq 0$. Pelo penúltimo teorema podemos concluir que estes dois vectores são linearmente independentes, satisfazendo assim a 2ª condição da definição de base. Vejamos se também satisfazem a 1ª: $(x, y, x+y) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1)$ e assim $\begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 = x+y \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & x+y \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & y \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. O sistema é sempre possível e determinado. Sendo assim $\forall x, y \in \Re, \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \Re$, pois $(x, y, x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)$ tais que $(x, y, x+y) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1)$. Os dois vectores geram $\mathbf{V}$ e como, além disso, são linearmente independentes, formam uma base de $\mathbf{V}$.