Capítulo III

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Capítulo III

Transformações – ou Aplicações.

Sejam dois conjuntos A e B. Se a cada elemento $a \in A$ for associado um – e um só – elemento $b \in B$, dir-se-á que foi definida uma *transformação* – ou *aplicação* – de A em B. $T : A \to B$. Ao elemento b dá-se o nome de *imagem* – ou *transformada* de a pela transformação T: $b = T(a)$. O conjunto das imagens de todos os elementos de A, chama-se *contradomínio* da transformação - $T(A)$ - sendo A o seu *domínio*.

<u>Exemplo</u> – Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z, t\}$. Definamos $T : A \to B$ do seguinte modo $T(a) = x$, $T(b) = z$, $T(c) = t$. O domínio desta transformação é, evidentemente, o conjunto A, o contradomínio é $T(A) = \{x, z, t\}$ - é óbvio que $T(A) \subset B$ - e as imagens de a, b e c são, respectivamente, x, z e t.

<u>Exemplo</u> – Seja a transformação $T : \Re^2 \to \mathbf{S}$ com $\mathbf{S} = \{(x, y, x)\}$ e definida por $T(x, y) = (x, y, x)$. Neste caso o domínio da transformação é $\Re^2$ e o contradomínio é o próprio $\mathbf{S}$.

<u>Exemplo</u> – Seja a transformação $T : \Re \to \Re$ definida por $T(x) = x^2$. O domínio desta transformação é $\Re$, mas o contradomínio é $\Re_0^{\ +}$.

Uma transformação diz-se *injectiva* se a elementos diferentes de A corresponderem imagens diferentes em B, isto é, $\forall a, b \in A, a \neq b \Rightarrow T(a) \neq T(b)$. As transformações definidas nos dois primeiros exemplos anteriores são injectivas. No entanto, a transformação indicada no terceiro exemplo não é injectiva, pois $2 \neq -2$, mas $T(2) = T(-2) = 4$.

Uma transformação será *sobrejectiva* se $T(A) = B$. É o caso da transformação apontada no segundo exemplo, $T(\Re^2) = \mathbf{S}$.

Se a transformação for injectiva e sobrejectiva, tomará o nome de transformação *bijectiva* - segundo exemplo.

Transformação Linear.

Sejam dois espaços vectoriais $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$. Uma transformação $T:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ é chamada *transformação linear* – ou *aplicação linear* – se:

1. $\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{U}, T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$
2. $\forall \mathbf{u}\in\mathbf{U}$ e $\forall\alpha\in\Re, T(\alpha\mathbf{u})=\alpha T(\mathbf{u})$

ou, simplesmente,

$\varphi(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})=\alpha\varphi\mathbf{u}+\beta\varphi\mathbf{v}$

<u>Exemplo</u> – Verificar se as transformações $T:\Re^2\to\Re^3$ a seguir definidas, são transformações lineares:

a) $T(x,y)=(x,y,0)$

b) $T(x,y)=(x,y,x+y+1)$

a) Sejam dois elementos quaisquer de $\Re^2$, (x,y) e (x',y') e um escalar α.

1. $T((x,y)+(x',y'))=T(x+x',y+y')=(x+x',y+y',0)$. Como se tem que $T(x,y)=(x,y,0)$ e $T(x',y')=(x',y',0)$, então $T(x,y)+T(x',y')=$ $=(x,y,0)+(x',y',0)=(x+x',y+y',0)$, e assim $T((x,y)+(x',y'))=$ $=T(x,y)+T(x',y')$.
2. $T(\alpha(x,y))=T(\alpha x,\alpha y)=(\alpha x,\alpha y,0)$, $\alpha T(x,y)=\alpha(x,y,0)=(\alpha x,\alpha y,0)$. Assim também $T(\alpha(x,y))=\alpha T(x,y)$.

A transformação definida em a) é, portanto, linear.

b) Sejam dois elementos quaisquer de $\Re^2$, (x,y) e (x',y') e um escalar α.

1. $T((x,y)+(x',y'))=T(x+x',y+y')=(x+x',y+y',x+x'+y+y'+1)$.

   Como $T(x,y)=(x,y,x+y+1)$ e $T(x',y')=(x',y',x'+y'+1)$, então verifica-se que $T(x,y)+T(x',y')=(x,y,x+y+1)+(x',y',x+y'+1)=$ $=(x+x',y+y',x+x'+y+y'+2)$. Tem-se, desta forma que: $T((x,y)+(x',y'))\neq T(x,y)+T(x',y')$.

Esta transformação não é linear.

Propriedades das Transformações Lineares.

1ª. - propriedade: A imagem do vector nulo é o vector nulo: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

2ª. - propriedade: A imagem do oposto de um vector é o oposto da imagem desse vector: $T(-\mathbf{u}) = -T(\mathbf{u})$.

3ª. - propriedade: $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k \in \mathbf{V}$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \in \Re$, $T(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{u}_k) = \alpha_1 T(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{u}_2) + \cdots + \alpha_k T(\mathbf{u}_k)$.

Matriz Associada a Uma Transformação Linear.

Considere-se uma transformação linear $T : \Re^n \to \Re^m$ e sejam: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base de $\Re^n$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ uma base de $\Re^m$. Como $\mathbf{u}_i \in \Re^n$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, $T(\mathbf{u}_i) \in \Re^m$. Daí que existirão α_{ij} $(i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$ tais que:

$$\begin{array}{l} T(\mathbf{u}_1) = \alpha_{11}\mathbf{v}_1 + \alpha_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{m1}\mathbf{v}_m \\ T(\mathbf{u}_2) = \alpha_{12}\mathbf{v}_1 + \alpha_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{m2}\mathbf{v}_m \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\quad . \qquad \cdots \quad . \\ T(\mathbf{u}_n) = \alpha_{1n}\mathbf{v}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{mn}\mathbf{v}_m \end{array}$$

. Seja, agora, um vector qualquer $\mathbf{u} \in \Re^{\mathbf{n}}$. O vector $\mathbf{u}$ será combinação linear dos vectores da base de $\Re^n$ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ isto é, existem escalares $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \Re$ tais que: $\mathbf{u} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{u}_n$. Pela 3ª propriedade das transformações lineares pode-se escrever: $T(\mathbf{u}) = T(\beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{u}_n) = \beta_1 T(\mathbf{u}_1) + \beta_2 T(\mathbf{u}_2) + \cdots + \beta_n T(\mathbf{u}_n)$. Recorrendo ao conjunto de equações anterior podemos então escrever o seguinte: $T(\mathbf{u}) = \beta_1(\alpha_{11}\mathbf{v}_1 + \alpha_{12}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{m1}\mathbf{v}_m) + \beta_2(\alpha_{12}\mathbf{v}_1 + \alpha_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{m2}\mathbf{v}_m) + \cdots + \beta_n(\alpha_{1n}\mathbf{v}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{mn}\mathbf{v}_n) = (\alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2 + \cdots + \alpha_{1n}\beta_n)\mathbf{v}_1 + (\alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2 + \cdots + \alpha_{2n}\beta_n)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\alpha_{m1}\beta_1 + \alpha_{m2}\beta_2 + \cdots + \alpha_{mn}\beta_n)\mathbf{v}_m$.

Verifica-se, assim, que se representarmos por $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ as coordenadas de $T(\mathbf{u})$ relativamente à base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ de $\Re^m$, ou seja, $T(\mathbf{u}) = \gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \gamma_m\mathbf{v}_m$, poderão ser obtidas - comparando com as duas expressões anteriores – a partir das seguintes relações: $\begin{array}{l} \gamma_1 = \alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2 + \cdots + \alpha_{1n}\beta_n \\ \gamma_2 = \alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2 + \cdots + \alpha_{2n}\beta_n \\ \quad . \qquad . \qquad . \quad \cdots \quad . \\ \gamma_m = \alpha_{m1}\beta_1 + \alpha_{m2}\beta_2 + \cdots + \alpha_{mn}\beta_n \end{array}$ que se podem reduzir à expressão matricial $\mathbf{c} = \mathbf{A} \times \mathbf{b}$, onde $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Esta matriz tem o nome de *matriz associada à transformação linear* T *relativamente às bases* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de $\Re^n$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ de $\Re^m$. Se estas bases forem as canónicas, dir-se-á apenas, *matriz associada à transformação linear* T.

<u>Exemplo</u> – Seja a transformação linear $T : \Re^2 \to \Re^3$ definida por $T(x, y) = (x, y, x + y)$. Determine a matriz associada a esta transformação relativamente às bases canónicas de $\Re^2$ e $\Re^3$.

Neste caso temos: $\mathbf{u}_1 = (1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1)$, $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$. $T(\mathbf{u}_1) = T(1,0) = (1,0,1) = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3$; $\quad T(\mathbf{u}_2) = T(0,1) = (0,1,1) = 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3$. Comparando com o que vimos acima para matriz associada à transformação linear $\begin{array}{l} T(\mathbf{u}_1) = \alpha_{11}\mathbf{v}_1 + \alpha_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{m1}\mathbf{v}_m \\ T(\mathbf{u}_2) = \alpha_{12}\mathbf{v}_1 + \alpha_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{m2}\mathbf{v}_m \\ \quad . \qquad . \qquad . \quad \cdots \quad . \\ T(\mathbf{u}_n) = \alpha_{1n}\mathbf{v}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{mn}\mathbf{v}_m \end{array}$ vemos que $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{21} = 0$, $\alpha_{31} = 1$ e $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{22} = 1$, $\alpha_{32} = 1$. A matriz $\mathbf{A}$ é então: $\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \;\; \uparrow \end{array}$.

Matrizes Semelhantes.

Diz-se que duas matrizes $\mathbf{S}'$ e $\mathbf{S}$ são *semelhantes*, se existir uma matriz $\mathbf{Q}$ regular, tal que $\mathbf{S}' = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{Q}$. Considere-se uma transformação linear $T: \Re^n \to \Re^n$ e duas bases de $\Re^n$: base $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e base $\mathbf{u}' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \ldots, \mathbf{u}'_n\}$.

Sejam $\mathbf{A}$ a matriz associada à transformaçãolinear T relativamente à base $\mathbf{u}$ e $\mathbf{A}'$ a matriz associada à mesma transformação, mas relativamente à base $\mathbf{u}'$. Dado um vector qualquer $\mathbf{v} \in \Re^n$, esse vector será combinação linear dos vectores de cada uma das bases $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$, pelo que existirão $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ e $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n \in \Re$ tais que $\begin{array}{l} \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{u}_n \\ \mathbf{v} = \beta'_1\mathbf{u}'_1 + \beta'_2\mathbf{u}'_2 + \cdots + \beta'_n\mathbf{u}'_n \end{array}$. Atendendo a que $T(\mathbf{v}) \in \Re^n$ existirão, também $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ e $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$ tais que $\begin{array}{l} T(\mathbf{v}) = \gamma_1\mathbf{u}_1 + \gamma_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \gamma_n\mathbf{u}_n \\ T(\mathbf{v}) = \gamma'_1\mathbf{u}'_1 + \gamma'_2\mathbf{u}'_2 + \cdots + \gamma'_n\mathbf{u}'_n \end{array}$. Como vimos, estes coeficientes podem ser obtidos a partir das relações $\mathbf{c} = \mathbf{A} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}' = \mathbf{A}' \times \mathbf{b}'$, onde $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ são as matrizes associadas à transformação linear – já referidas – e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}' = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \vdots \\ \gamma'_m \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \vdots \\ \beta'_n \end{pmatrix}$. Por outro lado sabe-se que, ao efectuar-se a mudança da base $\mathbf{u}$ para a base $\mathbf{u}'$, as coordenadas dos vectores $\mathbf{v}$ e $T(\mathbf{v})$ transformam-se como mostram as expressões: $\begin{array}{l} \mathbf{b} = \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \times \mathbf{b}' \\ \mathbf{c} = \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \times \mathbf{c}' \end{array}$ onde $\mathbf{M}$ é a matriz de mudança da base $\mathbf{u}$ para a base $\mathbf{u}'$. Tomando $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ dados acima e substituindo-os em $\mathbf{c} = \mathbf{A} \times \mathbf{b}$, obteremos: $\mathbf{M}^{\mathrm{T}} \times \mathbf{c}' = \mathbf{A} \times \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \times \mathbf{b}'$. Multipliquemos, agora, ambos os membros desta igualdade por $\left(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ - à esquerda: $\left(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \times \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \times \mathbf{c}' = \left(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \times \mathbf{A} \times \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \times \mathbf{b}'$, ou seja, $\mathbf{c}' = \left(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \times \mathbf{A} \times \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \times \mathbf{b}'$. Esta expressão comparada com $\mathbf{c}' = \mathbf{A}' \times \mathbf{b}'$ leva-nos a concluir que $\mathbf{A}' = \left(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \times \mathbf{A} \times \mathbf{M}^{\mathrm{T}}$.

As matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ são portanto semelhantes.

Imagem e Núcleo de uma Transformação Linear.

Seja a transformação linear: $T:\mathbf{U}\rightarrow\mathbf{V}$. Chama-se *imagem* da transformação linear T ao conjunto de vectores de $\mathbf{V}$ que são imagens dos vectores de $\mathbf{U}$: $T(\mathbf{U}) = \operatorname{Im}(T) = \{\mathbf{v}\in\mathbf{V} : \forall\mathbf{u}\in\mathbf{U}, T(\mathbf{u})=\mathbf{v}\}$. Chama-se *núcleo* de T ao conjunto de vectores de $\mathbf{U}$ cuja imagem é o vector nulo: $\mathrm{N}(T)=\{\mathbf{u}\in\mathbf{U} : T(\mathbf{u})=\mathbf{0}\}$.

<u>Exemplo</u> – Determine a imagem e o núcleo da transformação linear $T:\Re^3\rightarrow\Re^2$ definida por: $T(1,0,0)=(2,3)$, $T(0,1,0)=(-1,4)$, $T(0,0,1)=(-5,2)$.

Seja (x,y,z) o vector genérico de $\Re^3$. A imagem de T será, então, igual a $T(x,y,z)$. $T(x,y,z)=T(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)) = xT(1,0,0)+yT(0,1,0)+zT(0,0,1)=x(2,3)+ y(-1,4)+z(-5,2)=(2x-y-5z,3x+4y+2z)$, ou seja, tem-se assim que $\operatorname{Im}(T) = \{(2x-y-5z,3x+4y+2z)\}$.

Para determinar o núcleo de T: sendo $T(x,y,z)=(2x-y-5z,3x+4y+2z)$ para calcularmos $\mathrm{N}(T)$ teremos de procurar os valores de x, y, z que anulam $2x-y-5z$ e $3x+4y+2z$, ou seja, teremos de resolver o sistema que se segue

$$\begin{cases}2x-y-5z=0\\3x+4y+2z=0\end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -5 & 0\\ 3 & 4 & 2 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1/2 & -5/2 & 0\\ 0 & 11/2 & 19/2 & 0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1/2 & -5/2 & 0\\ 0 & 1 & 19/11 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -18/11 & 0\\ 0 & 1 & 19/11 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x-18/11\,z=0\\ y+19/11\,z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=18/11\,z\\ y=-19/11\,z\\ z=\forall\end{cases}.$$

O sistema é indeterminado e a sua solução geral é $\mathbf{S}=\left(18/11\,z,-19/11\,z,z\right)=z\left(18/11,-19/11,1\right)$. Quando $x=18/11\,z$ e $x=-19/11\,z$ tem-se que $2-y-5z=0$ e $3x+4y+2z=0$, logo $T\left(18/11\,z,-19/11\,z,z\right)=(0,0)$ e $\mathrm{N}(T)=\left\{\left(18/11\,z,-19/11\,z,z\right)\right\}$. O vector $(18,-19,11)$, por exemplo, pertence ao $\mathrm{N}(T)$.

Mudança de Base.

Seja uma transformação linear $T: \mathbf{V}^n \to \mathbf{V}^n$ e seja $\mathbf{M}$ a matriz de T na base $\mathbf{u}$. Consideremos então duas bases de um espaço vectorial $\mathbf{V}$, que apresentaremos por: $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Atendendo à definição de base, para qualquer vector $\mathbf{t} \in \mathbf{v}$ poderemos escrever: $\begin{array}{l} \mathbf{t} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n \\ \mathbf{t} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n \end{array}$ onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são as coordenadas de $\mathbf{t}$ na base $\mathbf{u}$ e $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ são as coordenadas de $\mathbf{t}$ na base $\mathbf{v}$. Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{v}$, também estes vectores serão combinações lineares dos vectores da base $\mathbf{u}$: $\begin{array}{l} \mathbf{v}_1 = m_{11}\mathbf{u}_1 + m_{12}\mathbf{u}_2 + \cdots + m_{1n}\mathbf{u}_n \\ \mathbf{v}_2 = m_{21}\mathbf{u}_1 + m_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + m_{2n}\mathbf{u}_n \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad \cdots \qquad . \\ \mathbf{v}_n = m_{n1}\mathbf{u}_1 + m_{n2}\mathbf{u}_2 + \cdots + m_{nn}\mathbf{u}_n \end{array}$ ou, ainda, $\mathbf{v} = \mathbf{M}\mathbf{u}$ sendo $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix}$. À matriz $\mathbf{M}$ daremos o nome de *matriz de mudança da base* $\mathbf{u}$ *para a base* $\mathbf{v}$.

Se recorrermos agora às igualdades anteriores poderemos obter: $\mathbf{t} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n = \beta_1(m_{11}\mathbf{u}_1 + m_{12}\mathbf{u}_2 + \cdots + m_{1n}\mathbf{u}_n) + \beta_2(m_{21}\mathbf{u}_1 + m_{22}\mathbf{u}_2 + {}$ ${} + \cdots + m_{2n}\mathbf{u}_n) + \cdots + \beta_n(m_{n1}\mathbf{u}_1 + m_{n2}\mathbf{u}_2 + \cdots + m_{nn}\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_1(\beta_1 m_{11} + \beta_2 m_{21} + \cdots + {}$ ${} + \beta_n m_{n1}) + \mathbf{u}_2(\beta_1 m_{12} + \beta_2 m_{22} + \cdots + \beta_n m_{n2}) + \cdots + \mathbf{u}_n(\beta_1 m_{1n} + \beta_2 m_{2n} + \cdots + \beta_n m_{nn})$.

Atendendo a que cada vector se expressa univocamente como combinação linear dos vectores de base, concluímos que: $\begin{array}{l} m_{11}\beta_1 + m_{12}\beta_2 + \cdots + m_{n1}\beta_n = \alpha_1 \\ m_{12}\beta_1 + m_{22}\beta_2 + \cdots + m_{n2}\beta_n = \alpha_2 \\ \quad . \qquad . \qquad \cdots \qquad . \qquad . \\ m_{1n}\beta_1 + m_{2n}\beta_2 + \cdots + m_{nn}\beta_n = \alpha_n \end{array}$, ou seja, $\alpha = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\beta$ onde $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ e $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$ é a matriz transposta de $\mathbf{M}$. Note-se que, se tivéssemos determinado a matriz $\mathbf{M}'$ de mudança da base $\mathbf{v}$ para a base $\mathbf{u}$, teríamos $\mathbf{u} = \mathbf{M}'\mathbf{v} = \mathbf{M}'(\mathbf{M}\mathbf{u}) = (\mathbf{M}'\mathbf{M})\mathbf{u}$ que nos leva a concluir que $\mathbf{M}'\mathbf{M} = \mathbf{I}$, ou seja, $\mathbf{M}' = \mathbf{M}^{-1}$. Esta expressão, além de nos fornecer uma relação entre as matrizes $\mathbf{M}'$ e $\mathbf{M}$, indica-nos também, que a matriz $\mathbf{M}$ é uma matriz regular, pois admite inversa.

<u>Exemplo</u> – Sejam as bases de $\Re^3$, $\mathbf{u} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\mathbf{v} = \{(1,2,1),(-1,-1,0),(3,1,-1)\}$.

a) Determine as matrizes de mudança da base $\mathbf{u}$ para a base $\mathbf{v}$ e desta para aquela.

b) Determine as coordenadas do vector $(5,-2,3)$ na base $\mathbf{v}$.

a) Determinação de $\mathbf{M}$ - matriz de mudança da base $\mathbf{u}$ para a base $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1,2,1) = (1,0,0) + 2(0,1,0) + (0,0,1) \\ \mathbf{v}_2 &= (-1,-1,0) = -(1,0,0) - (0,1,0) + 0(0,0,1) \text{ e assim } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \\ \mathbf{v}_3 &= (3,1,-1) = 3(1,0,0) + (0,1,0) - (0,0,1) \end{aligned}$$

Determinação de $\mathbf{M}'$ - matriz de mudança da base $\mathbf{v}$ para a base $\mathbf{u}$:

Da primeira igualdade obtemos: $\begin{cases} m_{11} - m_{12} + 3m_{13} = 1 \\ 2m_{11} - m_{12} + m_{13} = 0 \\ m_{11} - m_{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow m_{11} = 1,$$

$m_{12} = 3$, $m_{13} = 1$.

Da segunda igualdade obtemos: $\begin{cases} m_{21} - m_{22} + 3m_{23} = 0 \\ 2m_{21} - m_{22} + m_{23} = 1 \\ m_{21} - m_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow m_{21} = -1,$$

$m_{22} = -4$, $m_{23} = -1$.

Da terceira igualdade obtemos: $\begin{cases} m_{31} - m_{32} + 3m_{33} = 0 \\ 2m_{31} - m_{32} + m_{33} = 0 \\ m_{31} - m_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow m_{31} = 2,\ m_{32} = 5,$$

$m_{33} = 1$.

Então $\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. (Prove que $\mathbf{M}' = \mathbf{M}^{-1}$)

b) $\alpha = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\beta$, $\beta = \left(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\alpha = \mathbf{M}'^{\mathrm{T}}\alpha$. Assim $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 38 \\ 10 \end{pmatrix}$. As coordenadas de **t** na base **v** são 13, 38, 10, isto é, $\mathbf{t} = (5,-2,3) = 13(1,2,1) + 38(-1,-1,0) + 10(3,1,-1)$

Este mesmo exercício pode ser resolvido de forma diferente.

a) Assim, para calcular $\mathbf{M}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}$, faz-se o indicado na resolução para $\mathbf{M}'$, isto é, fazendo tudo de uma só vez, $\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \text{ Assim } \mathbf{M}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quanto a $\mathbf{M}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} = \left[\mathbf{M}_{\mathbf{v}}^{\mathbf{u}}\right]^{-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$. Assim $\mathbf{M}_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

A alínea b) é calculada muito facilmente:

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 38 \\ 10 \end{bmatrix}$. Evitamos assim calcular transpostas e inversas!