Capítulo IV

DETERMINANTES

Capítulo IV

O conceito de *determinante* surgiu tendo por objectivo a simplificação do estudo e resolução dos sistemas de equações lineares. Definiremos, de início, *determinante de 2ª ordem*, depois *determinante de 3ª ordem* e finalmente, por generalização, *determinate de ordem* n - ou de n-ésima ordem.

Determinante de 2ª Ordem.

Seja um sistema com duas equações e duas incógnitas $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$. x_1, x_2 são as incógnitas do sistema. a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} são os coeficientes das incógnitas. b_1, b_2 são os termos independentes, como já sabemos. Os coeficientes das incógnitas podem ser colocados num quadro chamado *matriz dos coeficientes do sistema*, como vimos: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Supondo que o sistema é possível e determinado, um dos coeficientes, pelo menos, será diferente de zero. Suponhamos que $a_{11} \neq 0$ e resolvamos o sistema pelo método da substituição: da primeira equação acima vem $x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}$.

Substituindo este valor na segunda equação tem-se $a_{21}\dfrac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} + a_{22}x_2 = b_2$, ou seja: $a_{21}b_1 - a_{21}a_{12}x_2 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2$ e $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}a_{12}$. Assim $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12}}$. Substituindo este valor em $x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}$, obter-se-ia $x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$. Os valores de x_1 e x_2 encontrados representam a solução do sistema dado. Note-se, no entanto, que os denominadores das duas fracções são iguais. Por definição o determinante da matriz inicial é o denominador comum das duas fracções e é representado pelo símbolo $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Por definição $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$ $= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Este determinante tem: 4 elementos: a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}

2 linhas: 1ª linha: a_{11}, a_{12}

2ª linha: a_{21}, a_{22}

2 colunas: 1ª linha: a_{11}, a_{21}

2ª linha: a_{12}, a_{22}

Diagonal principal: a_{11}, a_{22}

Segunda diagonal: a_{21}, a_{12}

<u>Exemplo</u> – Calcule o valor do determinante $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

$\Delta = 1 \times 4 - 3 \times (-2) = 10$.

Os numeradores das fracções têm a mesma forma que os denominadores, pelo que os podemos, também, considerar como sendo determinantes: O numerador de x_1 é o determinante de uma matriz que se obtém substituindo, na matriz inicial, os elementos da sua 2primeira coluna pelos termos independentes do sistema e o numerador de x_2 é o determinante de uma matriz que se obtém, substituindo, na matriz inicial, os elementos da sua segunda coluna pelos termos independentes: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} =$ $= b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1$. Estes factos vão-nos permitir entender melhor a *Regra de Cramer*, explicada mais adiante.

Saliente-se, desde já, que, *num determinante, o número de linhas é sempre igual ao número de colunas*. Neste caso esse número é 2, o que significa que o determinante é de *2ª ordem*.

Determinante de 3ª Ordem.

O *determinante de 3ª ordem* – isto é, o determinante com 3 linhas e 3 colunas – será definido a partir da resolução de um sistema com 3 equações e 3 incógnitas:

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{13}x_3 = b_3 \end{cases}$. A matriz dos coeficientes do sistema é agora $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Admitamos que o sistema é possível e determinado – neste caso, pelo menos um dos seus coeficientes, a_{11} por exemplo, será não nulo – e resolvamo-lo usando, novamente, o método da substituição. Da primeira equação $x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$ obtemos, substituindo este valor nas segunda e terceira equações: $\begin{cases} a_{21}\frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}\frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$, ou seja, teremos assim a equação $\begin{cases} a_{21}b_1 - a_{21}a_{12}x_2 - a_{21}a_{13}x_3 + a_{11}a_{22}x_2 + a_{11}a_{23}x_3 = a_{11}b_2 \\ a_{31}b_1 - a_{31}a_{12}x_2 - a_{31}a_{13}x_3 + a_{11}a_{32}x_2 + a_{11}a_{33}x_3 = a_{11}b_3 \end{cases}$ e, portanto, tem-se $\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_3 = \underline{a_{11}b_2 - a_{21}b_1} \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})x_2 + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})x_3 = \underline{a_{11}b_3 - a_{31}b_1} \end{cases}$. Este sistema tem duas equações e duas incógnitas - x_2 e x_3 - e a sua solução pode ser obtida, conforme já foi referido, a partir de duas fracções: $x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ e $x_3 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, sendo Δ o determinante da matriz dos coeficientes do sistema e Δ_1 e Δ_2 os determinantes que se obtêm daquele substituindo, respectivamente, a primeira coluna – para Δ_1 - e a segunda coluna – para Δ_2 - pelos termos independentes, isto é: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \end{vmatrix}$. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} \underline{a_{11}b_2 - a_{21}b_1} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ \underline{a_{11}b_3 - a_{31}b_1} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \end{vmatrix}$. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & \underline{a_{11}b_2 - a_{21}b_1} \\ a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & \underline{a_{11}b_3 - a_{31}b_1} \end{vmatrix}$. Efectuando os cálculos e simplificando os resultados obteríamos: $x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + a_{21}b_3a_{13} + a_{31}b_1a_{23} - a_{31}b_2a_{13} - a_{11}b_3a_{23} - a_{21}b_1a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}}$ e $x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{21}a_{32}b_1 + a_{31}a_{12}b_2 - a_{31}a_{22}b_1 - a_{11}a_{32}b_2 - a_{21}a_{12}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}}$. O valor de x_1

obter-se-ia substituindo estes dois resultados na expressão $x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$.

Teríamos: $x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} a_{33} + b_2 a_{32} a_{13} + b_3 a_{12} a_{23} - b_3 a_{22} a_{13} - b_1 a_{32} a_{23} - b_2 a_{12} a_{33}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33}}$. Os denominadores das três fracções são iguais. Por definição, o determinante da matriz (3×3) é o valor comum desses três denominadores e representa-se, simbolicamente, por: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Trata-se de um determinante com 9 elementos, 3 linhas e 3 colunas. A sua diagonal principal é constituida pelos elementos a_{11}, a_{22}, a_{33} e a segunda diagonal por a_{31}, a_{22}, a_{13}. Uma regra prática que permite obter o determinante a partir da sua representação simbólica é a *Regra de Sarrus* que consiste em repetir as duas primeiras linhas do determinante por baixo deste e obter os produtos dos elementos tomados três a três conforme se ilustra a seguir:

$$\begin{array}{l} \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array} \begin{array}{l} \left.\right\} \text{a cada um destes produtos atribui-se o sinal -} \\ \left.\right\} \text{a cada um destes produtos atribui-se o sinal +} \end{array}$$

Temos assim $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$.

<u>Exemplo</u> – Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Temos então

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{matrix} \end{array} = 1 \times 3 \times (-3) + 4 \times 2 \times (-1) + (-1) \times 2 \times 2 - (-1) \times 3 \times (-1) -$$

$$-1 \times 2 \times 2 - 4 \times 2 \times (-3) = -9 - 8 - 4 - 3 - 4 + 24 = -4.$$

A regra de Sarrus permite também calcular o determinante de 3ª ordem do seguinte modo: repetem-se as duas primeiras colunas à direita do determinante; os termos positivos do desenvolvimento são o termo principal e os produtos dos elementos dispostos paralelamente à diagonal principal; os termos negativos são o termo secundário e os produtos dos elementos dispostos paralelamente à diagonal secundária ou segunda diagonal:

$$\underbrace{\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right.}_{\text{a cada um destes produtos atribui-se o sinal -}}\underbrace{\left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}\right.}_{\text{a cada um destes produtos atribui-se o sinal +}}$$

. Temos assim $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Exemplo – Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Tem-se então: $\left|\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} = 2\times2\times3 + 3\times2\times3 + 1\times5\times1 - 2\times2\times1 - 3\times5\times3 -$

$-1\times2\times3 = 12 + 18 + 5 - 4 - 45 - 6 = -20$.

Repare-se, finalmente, que os numeradores das três fracções atrás indicadas, podem, também, ser considerados como determinantes cujos símbolos são, respectivamente,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ e } \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Regra de Cramer.

A *regra de Cramer* permite resolver sistemas de equações lineares. O que já sabemos sobre determinantes vai-nos ajudar a compreender este método. Vejamos então: um sistema de n equações com n variáveis pode ser resolvido pela regra de Cramer. Seja o sistema: $\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad . \qquad . \qquad . \quad \cdots \quad . \qquad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$. Seja $\mathbf{A}$ a matriz dos coeficientes:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Seja $\mathbf{A}_1$ a matriz que se obtém da matriz $\mathbf{A}$ substituindo os coeficientes da variável x_1 pelos termos independentes que figuram nas equações correspondentes: $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Calcula-se o valor de x_1 do seguinte modo: $x_1 = \dfrac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}}$. Do mesmo modo calculam-se os valores das demais variáveis $x_i = \dfrac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$.

A regra de Cramer é, pois, a seguinte: *Um sistema de Cramer tem uma única solução, sendo o valor de cada variável dado por uma fracção que tem para denominador o determinante da matriz dos coeficientes, e, para numerador, o determinante da matriz que se obtém a partir da matriz dos coeficientes, substituindo os coeficientes da variável considerada pelos termos independentes que figuram nas equações correspondentes.* Para que se tenha um sistema de Cramer, o número de equações tem que ser igual ao número de incógnitas; o determinante da matriz dos coeficientes do sistema tem que ser diferente de zero – o sistema é assim sempre possível e determinado.

<u>Exemplo</u> – Resolva, aplicando a regra de Cramer, o seguinte sistema $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 53 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{cases}$.

O determinante de $\mathbf{A}$ é: $$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & -4\\ 4 & 7 & -2\end{vmatrix} = 2\times5\times(-2)+3\times7\times4+4\times3\times(-4)-$$
$$\begin{matrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & -4\end{matrix}$$

$-4\times5\times4-2\times7\times(-4)-3\times3\times(-2)=10$. $\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix}53 & 3 & 4\\ 2 & 5 & -4\\ 31 & 7 & -2\end{vmatrix} = 30$, $\det \mathbf{A}_2 =$

$= \begin{vmatrix}2 & 53 & 4\\ 3 & 2 & -4\\ 4 & 31 & -2\end{vmatrix} = 50$, $\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix}2 & 3 & 53\\ 3 & 5 & 2\\ 4 & 7 & 31\end{vmatrix} = 80$. Por conseguinte: $x = \dfrac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \dfrac{30}{10} = 3$,

$y = \dfrac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \dfrac{50}{10} = 5$ e $z = \dfrac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = \dfrac{80}{10} = 8$.

Generalização do Conceito do Determinante.

Retomemos os seis termos do somatório que define o determinante de 3ª ordem: $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$. Verifica-se que, abstraindoo sinal, todos eles se podem obter do primeiro termo, $a_{11}a_{22}a_{33}$ - *termo principal* – permutando de todas as formas possíveis os primeiros sub-índices, mantendo inalteráveis os segundos. Procuremos, agora, uma lei que permita obter o sinal de cada um dos termos do somatório. Para isso tomemos a *ordem natural* dos números – 1, 2, 3 – ordem crescente. Quando, numa *permutação*, um número maior precede um menor, ocorre uma *inversão*.

Exemplo – Na permutação 1 2 3 o número de inversões é zero, porque $1<2<3$. Na permutação 2 3 1 há duas inversões – assinaladas com setas arqueadas. Na permutação 5 1 3 4 2 há 6 inversões.

Assinalando os 6 termos do somatório inicial, concluimos que:

- nos termos cujos primeiros sub-índices formam uma permutação com *um número par de inversões*, o sinal é **+,**
- nos termos cujos primeiros sub-índices formam uma permutação com *um número ímpar de inversões*, o sinal é **–.**

Sendo assim, obtemos:

✓ 1º termo -	1 2 3	0	inversões	+
✓ 2º termo -	2 3 1	2	inversões	+
✓ 3º termo -	3 1 2	2	inversões	+
✓ 4º termo -	3 2 1	3	inversões	-
✓ 5º termo -	1 3 2	1	inversão	-
✓ 6º termo -	2 1 3	1	inversão	-

Estas mesmas considerações são válidas, como é fácil de perceber, para os dois termos que formam o somatório que define o determinante de 2ª ordem. Deste modo ficamos aptos a generalizar esta lei de formação de termos no caso de determinante de ordem n. Considere-se a matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. A esta matriz pode associar-se um número – determinante da matriz – que é calculado do seguinte modo:

a) Considera-se o produto dos elementos da diagonal principal: $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ - termo principal do determinante.

b) Permutando de todas as maneiras possíveis os sub-índices dos elementos considerados em a) obtemos $n!$ produtos representados, genericamente, por: $a_{\alpha 1}, a_{\beta 2}, \ldots, a_{\gamma n}$ onde $(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ representa uma permutação dos números $1,2,\ldots,n$.

c) Multiplica-se cada um dos produtos obtidos em b) por $(-1)^I$ onde I é o número de inversões da permutação respectiva. Assim, cada um dos produtos ficará afectado do sinal + ou – conforme o número de inversões for par ou ímpar.

d) O somatório $\sum (-1)^I a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \ldots a_{\gamma n}$ de todos os $n!$ termos assim obtidos é, por definição, o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, ou seja, *determinante* *de ordem* n, cujo símbolo é: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Teorema de Laplace.

Como calcular um determinante de ordem superior a 3? Uma das formas de o fazer seria usar, directamente, a definição. No entanto, esse não seria um processo cómodo. O método mais usual para o cálculo de um determinante de qualquer ordem baseia-se no *Teorema de Laplace* que só será enunciado mais adiante. Entretanto vamos introduzir os conceitos de *menor complementar*, ou simplesmente *menor*, e de *cofactor*, ou *complemento algébrico*, de um elemento de um determinante:

- ☞ menor complementar, ou menor, de um elemento de um determinante, é o determinante que se obtém daquele suprimindo-lhe a linha e a coluna que se cruzam nesse elemento,
- ☞ cofactor, ou complemento algébrico de um elemento de um determinante, é o produto do menor complementar desse elemento por $(-1)^{i+k}$, onde i e k são as ordens da linha e da coluna, respectivamente, que se cruzam nesse elemento.

Representemos o menor complementar, ou menor, do elemento a_{ik} - elemento da linha i, coluna k - por M_{ik} e o seu complemento algébrico por A_{ik}. Assim, $A_{ik} = (-1)^{i+k} \times M_{ik}$.

<u>Exemplo</u> – Calcule o menor e o cofactor do elemento da 2ª linha e 3ª coluna do determinante $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 12 + 0 - 6 + 0 - 30 = -32$. A_{23} ou $C_{23} = (-1)^{2+3} \times (-32) =$

$= 32$.

Enunciemos, agora, o teorema de Laplace: *um determinante é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando cada um dos elementos de uma das suas linhas – ou colunas – pelo respectivo cofactor ou complemento algébrico.*

$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$ ou $\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk} =$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$, conforme o desenvolvimento se faça segundo a linha de ordem i ou a coluna de ordem k do determinante.

<u>Exemplo</u> – Desenvolver o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ segundo a) a 3ª linha,

b) a 2ª coluna.

a) $$\Delta = \underbrace{0 \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}_{A_{31}} + \underbrace{0 \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}_{A_{32}} + \underbrace{1 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}_{A_{33}} +$$

$$+ (-1) \times \underbrace{(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{A_{34}} = 0 + 0 + (-3 + 4 - 8 - 24 - 2 - 2) + (3 - 1 + 4 + 6 + 1 + 2) =$$

$$= -35 + 15 = -20 .$$

b) $$\Delta = 2 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1) \times (-1)^{4+2} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) \times (1 + 0 - 2 + 4 - 1 + 0) + 3 \times (-1 + 0 + 2 -$$

$$- 8 + 1 + 0) + (-1)(-1 - 4 + 0 + 0 + 2 + 1) = -2 \times 2 + 3 \times (-6) + 2 = -20$$

Repare-se que nos dois desenvolvimentos se obteve o mesmo valor para o determinante dado. Esse valor manter-se-ia, como é evidente, para qualquer outro desenvolvimento.

Se quiséssemos ter tido menos trabalho no cálculo do determinante bastaria operarmos sobre o determinante de modo a anular, segundo uma linha ou coluna, todos os elementos excepto um. Nesse caso o determinante de $\mathbf{A}$ é igual ao produto desse elemento pelo seu cofactor.

<u>Exemplo</u> - $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$: Calcule o valor do determinante.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times (-1) \times (4-2) = -5 \times 2 = -10 \, .$$

Matriz Adjunta.

Já anteriormente falamos em matriz adjunta. Vejamos melhor agora em que consiste e em como permite calcular a inversa de uma matriz.

A cada elemento a_{ij} da matriz quadrada $\mathbf{A} = (a_{ij})$ corresponde um cofactor – ou complemento algébrico - C_{ij}. Pode formar-se a matriz quadrada $\mathbf{C} = (c_{ij})$ também de ordem n, cujos elementos são os referidos cofactores. A matriz $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, transposta de $\mathbf{C}$ diz-se *matriz adjunta* de $\mathbf{A}$ e representa-se por $\mathrm{adj}\mathbf{A}$.

<u>Exemplo</u> – Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ então $c_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = +(6-10) = -4$, $c_{12} =$

$= (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(12-4) = -8$, $c_{13} = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = +(20-4) = 16$, $c_{21} =$

$= (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(3-15) = 12$, $c_{22} = (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +(6-6) = 0$, $c_{23} = (-1)^{2+3} \times$

$\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix} = -(10-2) = -8$, $c_{31} = (-1)^{3+1}\times\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix} = +(2-6) = -4$, $c_{32} = (-1)^{3+2}\times\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix} =$ $-(4-12) = 8$, $c_{33} = (-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix} = +(4-4) = 0$. A matriz $\mathbf{C}$ é $\mathbf{C} =$

$= \begin{pmatrix}-4 & -8 & 16\\ 12 & 0 & -8\\ -4 & 8 & 0\end{pmatrix}$ e a matriz adjunta de $\mathbf{A}$ é: $\text{adj}\mathbf{A} = \mathbf{C}^{\text{T}} = \begin{pmatrix}-4 & 12 & -4\\ .8 & 0 & 8\\ 16 & -8 & 0\end{pmatrix}$.

Para determinar a matriz adjunta de uma matriz $\mathbf{A}$, pode formar-se primeiro a matriz $\mathbf{A}^{\text{T}}$ e a seguir a matriz dos cofactores dessa matriz.

Qualquer que seja a matriz $\mathbf{A}$, de ordem n, tem-se: $\mathbf{A}\cdot(\text{adj}\mathbf{A}) = (\text{adj}\mathbf{A})\cdot\mathbf{A} =$

$$= (\det\mathbf{A})\cdot\mathbf{I} = (\det\mathbf{A})\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ . & . & \cdots & .\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

Matriz Inversa.

Consideremos a igualdade: $\mathbf{A}\cdot(\text{adj}\mathbf{A}) = (\text{adj}\mathbf{A})\cdot\mathbf{A} = (\det\mathbf{A})\cdot\mathbf{I}$. Supondo $\det\mathbf{A}\neq 0$, a igualdade anterior pode ser expressa do seguinte modo: $\mathbf{A}\cdot\left(\dfrac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\text{adj}\mathbf{A}\right) =$ $= \left(\dfrac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\text{adj}\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$ ou, representando por $\mathbf{B}$ a matriz $\dfrac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\text{adj}\mathbf{A}$, tem-se $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Toda a matriz $\mathbf{B}$ que satisfaça a condição $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ diz-se *matriz inversa* de $\mathbf{A}$ e representa-se por $\mathbf{A}^{-1}$ - como vimos já. Então $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\text{adj}\mathbf{A}$.

<u>Exemplo</u> **–** Seja a matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix}$. Ache a sua inversa.

Para encontrar a inversa de $\mathbf{A}$ calcula-se primeiro o seu determinante: $\det\mathbf{A} =$

$$= \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 60 + 4 - 12 - 20 - 12 = 32$$
$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{matrix}$$

. Como $\det \mathbf{A} \neq 0$ existe inversa. Finalmente calculamos a matriz dos cofactores $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -4 \\ -8 & 0 & 8 \\ 16 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ (ver ex. anterior). Logo $\text{adj}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -4 \\ -8 & 0 & 8 \\ 16 & -8 & 0 \end{pmatrix}$. Finalmente $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \text{adj}\mathbf{A} = \dfrac{1}{32} \times$

$$\times \begin{pmatrix} -4 & 12 & -4 \\ -8 & 0 & 8 \\ 16 & -8 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{32} & \frac{12}{32} & \frac{-4}{32} \\ \frac{-8}{32} & \frac{0}{32} & \frac{8}{32} \\ \frac{16}{32} & \frac{-8}{32} & \frac{0}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pode verificar-se que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Propriedades Fundamentais dos Determinantes.

1ª. propriedade: O valor de um determinante não se altera quando se trocam, ordenadamente as suas colunas com as suas linhas.

Exemplo – Os determinantes $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ e $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ são iguais. Com efeito $\Delta = -4 - 4 + 9 + 6 - 1 + 24 = 30$ e $\Delta' = -4 + 9 - 4 + 6 - 1 + 24 = 30$

Daqui resulta que qualquer propriedade demonstrada relativamente às linhas de um determinante, ficará também demonstrada para a as suas colunas. Quando nos referirmos simultaneamente às linhas ou colunas, chamaremos *fila*.

2ª. propriedade: Se uma das filas de um determinante é constituida pelo produto de n elementos, existindo sempre um – e um só – pertencente a uma dada fila. Se esta for constituida, apenas, por elementos nulos, cada um dos termos conterá um factor nulo e daí ser nulo o determinante.

3ª. propriedade: Permutando, entre si, duas filas paralelas de um determinante, o determinante obtido será simétrico do inicial.

Exemplo – Sejam os determinantes $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ e $\Delta' = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. Repare-se que Δ' se obteve de Δ permutando entre si a 1ª e a 3ª colunas. $\Delta = -4 - 4 + 9 + 6 - 1 + 24 = 30$. $\Delta' = -6 + 1 - 24 + 4 + 4 - 9 = -30$.

4ª. propriedade: Um determinante com duas filas paralelas iguais é nulo.

Considere-se um determinante com duas filas paralelas iguais. Permutando-se essas filas entre si, por um lado o determinante não se altera – pois as filas são iguais, por outro lado, usando a propriedade anterior, obtém-se um determinante simétrico do inicial. Representando este por Δ e o outro por Δ', teríamos, então $\Delta' = -\Delta$ e $\Delta' = +\Delta$, o que só será possível se $\Delta = 0$.

5ª. propriedade: Quando se multiplicam – ou se dividem – todos os elementos de uma das filas de um determinante por um número k, o determinante tem como valor o produto – ou o quociente – do determinante inicial por k.

Na verdade, quando se multiplicam por k todos os elementos de uma fila de um determinante, como cada termo contém, sempre, um elemento dessa fila, todos eles serão, também, multiplicados por k, o mesmo acontecendo, por conseguinte, ao somatório que define o determinante.

6ª. propriedade: Um determinante com duas filas paralelas proporcionais é nulo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & ka_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underbrace{=}_{5^{a}\ \text{propriedade}}$$

$$\underbrace{\underbrace{=}_{5^{a}\ \text{propriedade}} k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{6^{a}\ \text{propriedade}} \underbrace{=}_{4^{a}\ \text{propriedade}} 0$$

7ª. propriedade: Se cada elemento de uma fila de um determinante é igual à soma de duas parcelas, ele poder-se-á decompor na soma de dois determinantes que se obtêm daquele substituindo os elementos dessa fila sucessivamente pelas primeiras e pelas segundas parcelas dessas somas, mantendo inalteradas as restantes filas.

<u>Exemplo</u> - $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+b \\ -1 & 3 & c+d \\ 4 & 1 & e+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 3 & c \\ 4 & 1 & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ -1 & 3 & d \\ 4 & 1 & f \end{vmatrix}$ pois $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a+b \\ -1 & 3 & c+d \\ 4 & 1 & e+f \end{vmatrix} =$

$= 3(e+f) - (a+b) + 8(c+d) - 12(a+b) - (c+d) + 2(e+f) = 5(e+f) + 7(c+d) - 13\times$

$\times (a+b)$. $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ -1 & 3 & c \\ 4 & 1 & e \end{vmatrix} = 3e - a + 8c - 12a - c + 2e = 5e - 13a + 7c$. $\Delta'' =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ -1 & 3 & d \\ 4 & 1 & f \end{vmatrix} = 3f - b + 8d - 12b - d + 2f = 5f - 13b + 7d$. $\Delta' + \Delta'' = 5e - 13a + 7c +$

$+ 5f - 13b + 7d = 5(e+f) - 13(a+b) + 7(c+d) = \Delta$.

8ª. propriedade: Um determinante não se altera se aos elementos de uma das suas filas se adicionarem os elementos correspondentes de outra fila paralela multiplicados por um qualquer número k.

Sejam os determinantes $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ e $\Delta' =$

$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} + ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} + ka_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Provemos que $\Delta' = \Delta$. Aplicando duas propriedades, vem $\Delta' \underbrace{=}_{7^{\text{a}}\text{ propriedade}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$

$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} + ka_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} + ka_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} + ka_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta \underbrace{+}_{6^{\text{a}}\text{ propriedade}} 0 = \Delta$.

<u>Exemplo</u> – Se à segunda linha do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ adicionarmos a sua primeira linha multiplicada por (-2) obtemos o determinante $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ igual a Δ. Com efeito $\Delta' = \Delta = -17$.

Esta propriedade tem muita importância, pois será o uso dela que permitirá simplificar o cálculo dos determinantes principalmente se a sua ordem for superior a 3.

<u>Exemplo</u> – Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Se para resolvermos este problema, aplicássemos, directamente, o Teorema de Laplace, teríamos de calcular, a certo passo da resolução, quatro determinantes de 3ª ordem – seriam os menores complementares dos elementos da fila segundo a qual se faria o desenvolvimento do determinante. No entanto, se, previamente, aplicarmos, por três vezes, a 8ª propriedade como a seguir se indica, o número de determinantes de 3ª ordem a calcular, ficará reduzido a um. Vamos, então, adicionar, aos elementos da:

1ª. coluna, os elementos da 2ª coluna multiplicados por (-2)

2ª. coluna, os elementos da 2ª coluna multiplicados por (-3)

3ª. coluna, os elementos da 2ª coluna multiplicados por (-2)

Deste modo obtemos um novo determinante que, atendendo à 8ª propriedade, não difere do inicial: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 7 & 7 \\ -14 & 5 & -13 & -12 \end{vmatrix}$. Desenvolvendo este determinante segundo a sua segunda linha temos: $\Delta = 1 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ 7 & 7 & 7 \\ -14 & -13 & -12 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \\ -14 & -13 & -12 \end{vmatrix} =$

$= 7 \times (-4) = -28$.

Repare-se que foi a partir do elemento pertencente à 2ª linha e 2ª coluna que conseguimos reduzir a zero os outros elementos da 2ª linha. É por isso que esse elemento toma o nome de *elemento redutor*. É importante notar que o mesmo efeito seria produzido se adicionássemos, sucessivamente, aos elementos da 1ª, 3ª e 4ª linhas os elementos correspondentes da 2ª linha multiplicados, respectivamente, por (-2), 2 e (-5), ou, ainda, utilizando como redutor o elemento da 3ª linha, 3ª coluna. Finalmente saliente-se a conveniência de escolher, como elemento redutor, aquele que for igual a 1 ou (-1). No caso de tal elemento não existir pode proceder-se conforme se indica nos dois exemplos seguintes.

<u>Exemplo</u> – Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Neste determinante não existe qualquer elemento igual a 1 ou (-1). No entanto, ao aplicarmos a 5ª propriedade obtemos $\Delta = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ surgindo, deste modo, três elementos que podem ser usados, com vantagem, como redutores. Tomemos o que se encontra envolvido com um círculo e, aplicando a 8ª propriedade, anulemos os restantes elementos da 3ª coluna. Para tal adicionaremos:

à 2ª. linha, a 1ª multiplicada por (-3)

à 3ª. linha, a 1ª multiplicada por 1

à 4ª. linha, a 1ª multiplicada por 1

Assim, $\Delta = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & -5 & 0 & -9 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -3 & -5 & -9 \\ 5 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \times 8 = -16$.

<u>Exemplo</u> – Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

Neste exemplo não nos podemos aproveitar da particularidade que se verificava no exemplo anterior e que nos permitia aplicar a 5ª propriedade. É fácil, entretanto, obter um elemento que seja igual a 1 ou a (-1). Poderemos, para esse efeito, adicionar, por exemplo, à 1ª linha, a 2ª linha multiplicada por (-1): $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$. Obtém-se, desta forma, um determinante nas condições do penúltimo exemplo, que poderá ser calculado recorrendo aos métodos já usados: multiplica-se a 1ª coluna por (-1) e soma-se à 2ª coluna; multiplica-se a 1ª coluna por 4 e soma-se à 3ª coluna; multiplica-se a 1ª coluna por 1 e soma-se à 4ª coluna. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 14 & 0 \\ 4 & -1 & 19 & 2 \end{vmatrix} = -1\times$

$\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 1 & 6 & 6 \\ -1 & 14 & 0 \\ -1 & 19 & 2 \end{vmatrix} = -1\times 10 = -10$.

9ª. propriedade: Se, num determinante, são nulos todos os elementos situados abaixo – ou acima – da diagonal principal, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

De facto, desenvolvendo o determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ segundo a 1ª coluna, resulta: $a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} a_{11} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Procedendo do mesmo modo para o determinante obtido, tem-se $a_{11}\times a_{22}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. A iteração do processo conduzir-nos-ia ao resultado $\Delta = a_{11}\times a_{22}\times a_{33}\times\cdots\times a_{nn}$.

Valores Próprios e Vectores Próprios.

Chama-se *vector próprio* de uma transformação linear f, representada pela matriz $\mathbf{T}$, a todo o vector não nulo $\mathbf{X}\in\mathbf{E}_n$, tal que, para λ real: $f(\mathbf{X}) = \lambda(\mathbf{X})$ ou $\mathbf{TX} = \lambda\mathbf{X}$.

Se $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, é vector próprio da transformação linear f, representada pela matriz $\mathbf{T}$, o número real λ tal que $\mathbf{TX} = \lambda\mathbf{X}$ é denominado *valor próprio* de f.

A igualdade $\mathbf{TX} = \lambda\mathbf{X}$ pode ser verificada por mais de um valor próprio λ. O conjunto de todos os valores próprios de uma transformação linear f é chamado *espectro* de f. Os vectores próprios são também denominados *vectores característicos*, *eigenvectores* ou *autovectores*. Por sua vez os valores próprios são também denominados *valores característicos*, *eigenvalores*, *autovalores*, *raízes características* ou *raízes latentes*.

Vamos ver como se determinam os valores próprios e vectores próprios em $\Re^3$, por exemplo: se $\mathbf{X}$ e λ são respectivamente, vector próprio e valor próprio de uma transformação linear representada pela matrix $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ tem-se $\mathbf{TX} = \lambda\mathbf{X}$ ou $\mathbf{TX} - \lambda\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Tendo em vista que $\mathbf{X} = \mathbf{IX}$, pode escrever-se $\mathbf{TX} - \lambda\mathbf{IX} = \mathbf{0}$ ou $(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Mas $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, logo: $\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{0}$ e $\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Por sua vez tem-se que: $\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ é uma equação do 3º grau em λ. Em virtude de que toda a equação do 3º grau, admite sempre, pelo menos, uma raíz real – as outras duas podem ser complexas ou reais, a transformação linear f, em $\Re^3$, possui pelo menos um valor próprio λ. A substituição de λ pelos seus valores no sistema homogéneo de equações lineares permite determinar os vectores próprios associados. O polinómio $\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$ é denominado *polinómio característico* da transformação linear f - ou da matriz $\mathbf{T}$ associada. A equação $\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ é denominada *equação característica* da transformação linear f ou da matriz $\mathbf{T}$. Os valores próprios da transformação linear f - ou da matriz $\mathbf{T}$ - são as raízes reais da sua equação característica.

<u>Exemplo</u> – Determinar os valores próprios e vectores próprios da matriz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Primeiro, determinaremos os valores próprios:

$$\mathbf{AX}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-5x_1+2x_2=\lambda x_1\\ 2x_1-2x_2=\lambda x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-5-\lambda)x_1+2x_2=0\\ 2x_1(-2-\lambda)x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{0}.\ \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-5-\lambda & 2\\ 2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(-5-\lambda)(-2-\lambda)-4=$$

$$=\lambda^2+7\lambda+6=0.\qquad \lambda=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\times1\times6}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-7\pm5}{2}\Leftrightarrow\lambda_1=-1\vee$$

$\vee\,\lambda_2=-6$. Assim $\lambda_1=-1$ e $\lambda_2=-6$ são os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$.

Determinemos os vectores próprios associados aos valores próprios encontrados:

Sabemos que $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{0}$, isto é: $\begin{pmatrix}-5-\lambda & 2\\ 2 & -2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. Como

$\lambda_1=-1$, teremos $\begin{pmatrix}-5-(-1) & 2\\ 2 & -2-(-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4x_1+2x_2=0\\ 2x_1-x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2\\ 2(-2x_2)+4x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2\\ x_2=\forall\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}x_2=-\dfrac{x_1}{2}=-\dfrac{1}{2}x_1\\ x_1=\forall\end{cases}.$$

Então $\mathbf{E}(-6)=\left\{x_1\left(1,-\frac{1}{2}\right)\right\}$ ou $\mathbf{E}(-6)=\{x_2(-2,1)\}$. $\mathbf{E}(-6)$ é o subespaço próprio associado a $\lambda_2=-6$ e os vectores próprios associados são todos os vectores do tipo $x_1\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ com $x_1\neq0$ ou $x_2(-2,1)$ com $x_2\neq0$.

Neste caso os dois subespaços próprios têm dimensão 1 – são definidos à custa de um vector. Um único vector gera o espaço.

A matriz dos vectores próprios é dada por $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Diagonalização de Uma Matriz Quadrada.

Uma matriz é diagonalizável se puder ser colocada na forma escalonada seguinte

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{D}$, em que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os valores próprios da matriz inicial. Esta matriz pode ser obtida a partir da fórmula $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ em que $\mathbf{X}$ representa a matriz dos vectores próprios – na forma de colunas.

<u>Exemplo</u> – Diagonalize a matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Já vimos que $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -6$, do exemplo anterior. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculemos

$$\mathbf{X}^{-1} = \left(\begin{array}{cc:cc} \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \quad \text{Assim} \quad \mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}. \quad \text{Então} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{5} & -\frac{6}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Uma matriz só é diagonalizável se a dimensão de cada subespaço próprio associado ao valor próprio é igual à ordem de multiplicidade – única, dupla, etc – do valor próprio correspondente.