Capítulo V

ESPAÇOS EUCLIDIANOS

Capítulo V

Produto Escalar em Espaços Vectoriais.

Chama-se *produto escalar* no espaço vectorial $\mathbf{E}$ a uma aplicação $\mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \Re$ que a todo o par real $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de vectores de $\mathbf{E}$ associa um número real, indicado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, tal que os seguintes axiomas sejam verificados:

P1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

P2) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

P3) $\mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

P4) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ se e somente se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

O número real $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ chama-se produto escalar dos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

<u>Exemplo</u> – No espaço vectorial das forças aplicadas a um ponto, a função que a cada par de forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ associa o número real obtido multiplicando-se as intensidades dessas forças pelo cosseno do ângulo θ que formam, é um produto escalar nesse espaço: $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 = |\mathbf{F}_1||\mathbf{F}_2| \cos\theta$.

<u>Exemplo</u> – No espaço vectorial dos polinómios em x, definidos num intervalo fechado $[a,b]$, a função que a cada par de polinómios $p = p(x)$ e $q = q(x)$ associa o número real obtido mediante o integral definido do produto desses polinómios, é um produto escalar nesse espaço $p \cdot q = \int_a^b p(x)q(x)dx$.

<u>Exemplo</u> – No $\Re^n$, a aplicação de $\Re^n \times \Re^n \to \Re$ que ao par de vectores $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ e $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ associa o número real: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n$ é um produto escalar.

Espaço Vectorial Euclidiano.

Um espaço vectorial real, de dimensão finita - n finito – no qual está definido um produto escalar, é um *espaço vectorial euclidiano*.

Módulo de um Vector e Suas Propriedades.

Dado um vector $\mathbf{v}$ de um espaço vectorial euclidiano $\mathbf{E}$, chama-se *módulo* ou *norma* de $\mathbf{v}$ ao número real não negativo, indicado por $|\mathbf{v}|$, definido por $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.

<u>Exemplo</u> – Se $\mathbf{v} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (x, y, z) \cdot (x, y, z) = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = x^2 + y^2 + z^2$, então $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

i) Se $|\mathbf{v}| = 1$, isto é, se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1$, o vector $\mathbf{v}$ é chamado *vector unitário*.

ii) Dado um vector qualquer $\mathbf{u} \in \mathbf{E}$, diferente de $\mathbf{0}$, o vector: $\frac{1}{|\mathbf{u}|} \times \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ é um vector unitário.

<u>Exemplo</u> – No $\Re^n$, os vectores: $\mathbf{E}_1 = (1,0,0,\cdots,0)$; $\mathbf{E}_2 = (0,1,0,\cdots,0)$; $\mathbf{E}_3 = (0,0,1,\cdots,0)$, …, $\mathbf{E}_n = (0,0,0,\cdots,1)$ são unitários.

Vejamos as propriedades do módulo de um vector:

I) $|\mathbf{v}| \geq 0$ e $|\mathbf{v}| = 0$ se e somente se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Esta propriedade é consequência de P4)

II) $|\lambda \mathbf{v}| = |\lambda||\mathbf{v}|$. De facto $|\lambda \mathbf{v}| = \sqrt{(\lambda \mathbf{v}) \cdot (\lambda \mathbf{v})} = \sqrt{\lambda^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})} = |\lambda| \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = |\lambda||\mathbf{v}|$.

Atenção: Sendo λ um escalar, $\lambda^2 = \pm\lambda = |\lambda| \neq$ norma.

III) $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. De facto, se um dos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ é nulo, a verificação da propriedade é imediata. Se nem $\mathbf{u}$ nem $\mathbf{v}$ são nulos, para qualquer $\lambda \in \Re$: $|\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}| \geq 0$ e $|\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v})} \Leftrightarrow |\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}| =$

$= \sqrt{\underbrace{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}_{\geq 0} + 2\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \lambda^2\underbrace{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}_{\geq 0}}$ tendo em vista que o primeiro membro da igualdade acima é ≥ 0, o discriminante do trinómio em λ que figura no segundo membro deve ser ≤ 0 - não queremos que existam duas raízes, pois haveria zonas em que a função era negativa e aí não poderíamos calcular normas: se $(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \lambda^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}))$ ($= ax^2 + bx + c$, em que $a = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$, $b = 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$, $c = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$, logo $b^2 - 4ac = (2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}))^2 - - 4(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) \leq 0 \Leftrightarrow \Delta \leq 0$).

Temos assim que se $\Delta \leq 0$, então $(2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}))^2 - 4(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) \leq 0 \Leftrightarrow 4(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 - - 4(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \leq 0 \Leftrightarrow (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) \leq 0 \Leftrightarrow |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \leq 0$ e assim tem-se $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2 \leq |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \Leftrightarrow |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

Nota: Se $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$ então $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$.

A desigualdade $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ é conhecida com o nome de *desigualdade de Schwarz* ou *inequação de Cauchy-Schwarz*.

O sinal $=$ vale somente quando $\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$, isto é, quando $\mathbf{u} = (-\lambda)\mathbf{v}$. Em particular, em $\Re^3$ a igualdade verifica-se para vectores colineares.

IV) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$. De facto, $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})} \Leftrightarrow |\mathbf{u}+\mathbf{v}| = = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} \Leftrightarrow |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2$. Mas sabemos que

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \leq \underbrace{\overbrace{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}^{\text{escalar}} \leq \overbrace{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}^{\text{normas}}}_{\text{III}}, \quad \text{logo} \quad |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 \leq |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 \Leftrightarrow |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 \leq (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2,$$

obtendo-se assim $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$, inequação designada por *desigualdade triangular*.

Ângulo de Dois Vectores.

A desigualdade de Schwarz: $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$ permite escrever $-|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}| \leq \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \leq |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|$, isto é, $-\frac{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} \leq \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} \leq \frac{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} \leq 1$. Verifica-se que $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$ varia entre

–1 e 1 tal como o cosseno de um ângulo θ. Por esse motivo podemos dizer que $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$, em que θ é o *ângulo* entre dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Vectores Ortogonais e Conjunto Ortogonal de Vectores.

A espressão $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$ permite dizer que $\theta = \pi/2$, isto é, $\cos\theta = 0$ se e somente se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. Nestas condições, diz-se que dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de um espaço vectorial euclidiano $\mathbf{E}$ são *ortogonais*, e representa-se por $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$, se e apenas se $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. O vector $\mathbf{0}$ é ortogonal a qualquer vector $\mathbf{v}\in\mathbf{E}$: $\mathbf{0}\cdot\mathbf{v} = 0$. Reciprocamente, se $\mathbf{u}$ é ortogonal a qualquer vector $\mathbf{v}\in\mathbf{E}$, então $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
Um conjunto de vectores é chamado *ortogonal* quando dois vectores quaisquer $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ desse conjunto são ortogonais, isto é, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

<u>Exemplo</u> – Em $\Re^n$, os vectores $\mathbf{E}_1 = (1,0,0,\cdots,0)$; $\mathbf{E}_2 = (0,1,0,\cdots,0)$; $\mathbf{E}_3 = (0,0,1,\cdots,0)$, …, $\mathbf{E}_n = (0,0,0,\cdots,1)$ constituem um conjunto ortogonal de vectores: se escolhermos quaisquer dois deles e efectuarmos o produto escalar ou interno temos $\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2 = 1\times 0 + 0\times 1 + 0\times 0 + \cdots + 0\times 0 = 0$.

<u>Teorema</u> – Um conjunto ortogonal de vectores não nulos, $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é linearmente independente.

Consideremos a igualdade: $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Começemos por considerar por hipótese de que o contrário é verdadeiro. Se o conjunto $\mathbf{S}$ fosse linearmente dependente, pelo menos um dos α seria diferente de zero. Vamos supor que se tem $\alpha_1 \neq 0$: $\alpha_1\overbrace{(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1)}^{\neq 0} + \alpha_2\overbrace{(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1)}^{\perp} + \alpha_3\overbrace{(\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_1)}^{\perp} + \cdots + \alpha_n\overbrace{(\mathbf{v}_n\cdot\mathbf{v}_1)}^{\perp} = \mathbf{0}\cdot\mathbf{v}_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) + \alpha_2\times 0 + \alpha_3\times 0 + \cdots + \alpha_n\times 0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) + 0 + 0 + \cdots + 0 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) = 0$. Tendo em vista que $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 > 0$ - pois $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 = |\mathbf{v}_1|^2 > 0$ - pode concluir-se que $\alpha_1 = 0$ e, por consequência, o conjunto $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é linearmente independente. Podemos fazer o mesmo para $\mathbf{v}_2$, etc.

Se $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$ são subconjuntos não vazios do espaço vectorial euclidiano $\mathbf{E}$, diz-se que $\mathbf{S}_1$ é *ortogonal* a $\mathbf{S}_2$, e representa-se por $\mathbf{S}_1 \perp \mathbf{S}_2$, se qualquer vector $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{S}_1$ é ortogonal a qualquer vector $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{S}_2$.

<u>Teorema</u> – Dado um subconjunto $\mathbf{S}$ não vazio do espaço vectorial euclidiano $\mathbf{E}$, o conjunto $\mathbf{S}^{\perp}$ dos vectores ortogonais a $\mathbf{S}$ é um subespaço vectorial de $\mathbf{E}$.

De facto,

i) Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S}^{\perp}$ para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$, tem-se $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{u} = 0$, o que mostra que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S}^{\perp}$.

ii) Analogamente, verifica-se que, para qualquer $\lambda \in \Re$, $\lambda \mathbf{v}_1 \in \mathbf{S}^{\perp}$.

O subespaço $\mathbf{S}^{\perp}$ de todos os vectores ortogonais ao subconjunto $\mathbf{S}$ é chamado *complemento ortogonal* de $\mathbf{S}$.

Conjunto Ortonormal e Base Ortonormal.

Um conjunto de vectores é *ortonormal* se é ortogonal e todos os seus vectores são unitários.

<u>Exemplo</u> – Em $\Re^n$, o conjunto dos vectores $\mathbf{E}_1 = (1,0,0,\cdots,0)$; $\mathbf{E}_2 = (0,1,0,\cdots,0)$; $\mathbf{E}_3 = (0,0,1,\cdots,0)$, $\ldots$, $\mathbf{E}_n = (0,0,0,\cdots,1)$ é ortonormal.

Um conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ que seja uma base do espaço vectorial euclidiano $\mathbf{E}$ e seja ortonormal, diz-se uma *base ortonormal* de $\mathbf{E}$.

<u>Exemplo</u> – Os vectores $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \ldots, \mathbf{E}_n$ referidos atrás constituem uma base ortonormal de $\Re^n$.

Componentes dos Vectores e Produto Escalar.

Se $\mathbf{S} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ é uma base do espaço vectorial $\mathbf{E}$ e se $\mathbf{u} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n$ e $\mathbf{v} = b_1\mathbf{x}_1 + b_2\mathbf{x}_2 + \cdots + b_n\mathbf{x}_n$ são dois vectores quaisquer de $\mathbf{E}$, a aplicação $\mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \Re$ que associa ao par de vectores $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ o número real: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ é um produto escalar. Vejamos: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$
$= (a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n) \cdot (b_1\mathbf{x}_1 + b_2\mathbf{x}_2 + \cdots + b_n\mathbf{x}_n) = (a_1\mathbf{x}_1 \times b_1\mathbf{x}_1) + (a_2\mathbf{x}_2 \times b_2\mathbf{x}_2) +$
$+ \cdots + (a_n\mathbf{x}_n \times b_n\mathbf{x}_n) = a_1b_1|\mathbf{x}_1|^2 + a_2b_2|\mathbf{x}_2|^2 + \cdots + a_nb_n|\mathbf{x}_n|^2 = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$.

De facto,

P1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

P2) Se $\mathbf{w} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + \cdots +$
$+ a_n(b_n + c_n) \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + \cdots + a_nb_n + a_nc_n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) + (a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n) \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) =$
$= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

P3) Se $\lambda \in \Re$: $\mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v}) = a_1 \times \lambda b_1 + a_2 \times \lambda b_2 + \cdots + a_n \times \lambda b_n \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v}) = \lambda(a_1b_1 +$
$+ a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

P4) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$, sendo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, somente se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Vejamos o seguinte:

I) Em particular, em $\Re^n$, considerando a base ortonormal $\mathbf{E}_1 = (1,0,0,\cdots,0)$; $\mathbf{E}_2 = (0,1,0,\cdots,0)$; $\mathbf{E}_3 = (0,0,1,\cdots,0)$, …, $\mathbf{E}_n = (0,0,0,\cdots,1)$, o produto escalar dos vectores $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ e $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ é, sendo $\mathbf{u} = a_1\mathbf{E}_1 + a_2\mathbf{E}_2 + a_3\mathbf{E}_3 + \cdots + a_n\mathbf{E}_n$ e $\mathbf{v} = b_1\mathbf{E}_1 + b_2\mathbf{E}_2 + b_3\mathbf{E}_3 + \cdots + b_n\mathbf{E}_n$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n$. Aliás, levando-se em conta as propriedades do produto escalar e tendo em vista que: $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = 0$ se $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$, $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = 1$ se $\mathbf{i} = \mathbf{j}$, o cálculo de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dá exactamente a expressão acima.

II) Como consequência imediata do cálculo do produto escalar de dois vectores, tem-se para $\mathbf{u} = \mathbf{v}$: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt.

Dado um espaço vectorial euclidiano $\mathbf{E}$ e uma base $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ desse espaço, é possível, a partir dessa base, determinar uma base ortonormal de $\mathbf{E}$. De facto, supondo que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ não são ortogonais, considere-se: $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1$ e determine-se o valor de α de modo a que o vector $\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{x}_1$ seja ortogonal a $\mathbf{x}_1$: se $\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = 0$ então $(\mathbf{v}_2 - \alpha\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1 - \alpha(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1}$, isto é,

$\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 - \left(\dfrac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1}\right)\mathbf{x}_1$. Assim, os vectores $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ são ortogonais.

Consideremos agora o vector: $\mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_3 - a_2\mathbf{x}_2 - a_1\mathbf{x}_1$ e determine-se os valores de a_2 e a_1 de modo que o vector $\mathbf{x}_3$ seja ortogonal aos vectores $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$:

$$\begin{cases} \overbrace{(\mathbf{v}_3 - a_2\mathbf{x}_2 - a_1\mathbf{x}_1)}^{\mathbf{x}_3} \cdot \mathbf{x}_1 = 0 \\ \underbrace{(\mathbf{v}_3 - a_2\mathbf{x}_2 - a_1\mathbf{x}_1)}_{\mathbf{x}_3} \cdot \mathbf{x}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_1 - a_2\overbrace{(\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1)}^{0} - a_1(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1) = 0 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_2 - a_2(\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2) - a_1\underbrace{(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)}_{0} = 0 \end{cases}.$$

Sabendo que $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$ então, $\begin{cases} \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_1 - a_1(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1) = 0 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_2 - a_2(\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2) = 0 \end{cases}$ e $a_1 = \dfrac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1}$, $a_2 = \dfrac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2}$, isto é,

$\mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_3 - \overbrace{\left(\dfrac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2}\right)}^{a_2}\mathbf{x}_2 - \overbrace{\left(\dfrac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1}\right)}^{a_1}\mathbf{x}_1$. Assim, os vectores $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$ são ortogonais.

Pode concluir-se o teorema por indução admitindo que, por este processo, tenham sido obtidos $(n-1)$ vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}$ e considerar o vector: $\mathbf{x}_n = \mathbf{v}_n - a_{n-1}\mathbf{x}_{n-1} - \cdots - a_3\mathbf{x}_3 - a_2\mathbf{x}_2 - a_1\mathbf{x}_1$, onde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ são tais que o referido vector $\mathbf{x}_n$ seja ortogonal aos vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}$. Os valores de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ que aparecem em $\mathbf{x}_n$ são:

$$a_1 = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1}, a_2 = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2}, a_3 = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3}, \cdots, a_{n-1} = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{x}_{n-1}}{\mathbf{x}_{n-1} \cdot \mathbf{x}_{n-1}}.$$

A base $\mathbf{S} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ é uma base ortogonal. Para se obter uma base ortonormal basta multiplicar cada $\mathbf{x}_i$ por $\dfrac{1}{|\mathbf{x}_i|}$. Assim, a base:

$\mathbf{S}' = \left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|}, \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|}, \mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_3|}, \ldots, \mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{x}_n}{|\mathbf{x}_n|} \right\}$ é uma base ortonormal – os vectores são ortogonais e unitários – obtida a partir da base $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, base não ortogonal. O processo que permite a determinação da base ortonormal chama-se *processo de Gram-Schmidt*.

Tendo em vista que, $a_1 = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} = \mathbf{v}_n \cdot \frac{\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} = \mathbf{v}_n \cdot \frac{\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|^2} = \mathbf{v}_n \cdot \frac{\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|} \times \frac{1}{|\mathbf{x}_1|} =$ $= (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_1) \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}_1|}$, $a_2 = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2} = \mathbf{v}_n \cdot \frac{\mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2} = \mathbf{v}_n \cdot \frac{\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|^2} = \mathbf{v}_n \cdot \frac{\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|} \times \frac{1}{|\mathbf{x}_2|} = (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_2) \cdot$ $\cdot \frac{1}{|\mathbf{x}_2|}$. Do mesmo modo, $a_3 = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_3} = \cdots = (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_3) \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}_3|}$, …, $a_{n-1} = \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{x}_{n-1}}{\mathbf{x}_{n-1} \cdot \mathbf{x}_{n-1}} =$ $= \cdots = (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_{n-1}) \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}_{n-1}|}$. Os vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_n$ podem ser expressos do seguinte modo:

I) $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1$

II) $\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 - a_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\frac{\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|} \Leftrightarrow \mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$

III) $\mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_3 - a_2\mathbf{x}_2 - a_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\frac{\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|} - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\frac{\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|} \Leftrightarrow \mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 -$
$- (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$

Da mesma forma teríamos $\mathbf{x}_4 = \mathbf{v}_4 - (\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3 - (\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 - (\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$, …, $\mathbf{x}_n = \mathbf{v}_n - (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_{n-1})\mathbf{u}_{n-1} - \cdots - (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 - (\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$.

<u>Exemplo</u> – Os vectores $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$ de $\Re^3$ não são ortogonais e não são todos unitários.

Vejamos: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2 \neq 0$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 1 \neq 0$, $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 1 \neq 0$. Quanto às normas: $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} =$ $= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \neq 1$, $|\mathbf{v}_2| = \sqrt{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$, $|\mathbf{v}_3| = \sqrt{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3} =$ $= \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$.

Os vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são linearmente independentes e geram $\Re^3$, porém, apesar de $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ constituir uma base de $\Re^3$, não é uma base ortonormal. A partir dela, e utilizando o processo de Gram-Schmidt, pode obter-se uma base ortonormal $\mathbf{S}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de $\Re^3$. Vejamos como: $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = (1,1,1)$; $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$. Calculemos agora $(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1) = (0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Então $\mathbf{x}_2 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (0,1,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Já calculamos $\mathbf{x}_1 = (1,1,1,)$ e $\mathbf{x}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Calculemos agora $\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}}} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{6}{9}}} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Calculemos então $\mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$. Precisamos de calcular $(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)$ e ainda $(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)$: $(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2) = (0,0,1) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $(\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1) = (0,0,1) \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Logo $\mathbf{x}_3 = (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (0,0,1) - \left(-\frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Logo $\mathbf{x}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Sendo assim $\mathbf{S} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ é uma base ortogonal. Falta calcular $\mathbf{u}_3$ para termos a base ortonormal: $\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_3|} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2}{4}}} =$

$=\dfrac{\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Então $\mathbf{S}'=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}=\left\{\mathbf{u}_1=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\mathbf{u}_2=\right.$ $\left.=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right),\mathbf{u}_3=\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ é uma base ortonormal. Podemos confirmá-lo, provando que $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ são vectores ortogonais e unitários:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\dfrac{2}{\sqrt{18}}+\dfrac{1}{\sqrt{18}}+\dfrac{1}{\sqrt{18}}=0\\
\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_3=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0-\dfrac{1}{\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}=0\\
\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_3=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0-\dfrac{1}{\sqrt{12}}+\dfrac{1}{\sqrt{12}}=0
\end{array}\right\}\text{ortogonais}$$

$$\left.\begin{array}{l}
|\mathbf{u}_1|=\sqrt{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{3}{3}}=1\\
|\mathbf{u}_2|=\sqrt{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_2}=\sqrt{\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}}=\sqrt{\dfrac{6}{6}}=1\\
|\mathbf{u}_3|=\sqrt{\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{u}_3}=\sqrt{0^2+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{0+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{2}}=1
\end{array}\right\}\text{unitários}$$

Vejamos agora o que podemos dizer do vector $\mathbf{E}_1=(1,0,0)$ de $\Re^3$ em relação a duas bases diferentes: $\mathbf{S}'=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ e $\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$, cujos vectores já conhecemos:

<u>Exemplo</u> – O vector $\mathbf{E}_1=(1,0,0)$ de $\Re^3$ pode ser expresso como combinação linear dos vectores da base $\mathbf{S}'=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$, referidos no exemplo anterior, e é unitário nessa base. De facto: $\mathbf{E}_1=x\mathbf{u}_1+y\mathbf{u}_2+z\mathbf{u}_3\Leftrightarrow(1,0,0)=x\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+y\cdot$ $\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)+z\cdot\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow(1,0,0)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}},\dfrac{x}{\sqrt{3}},\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)+\left(-\dfrac{2y}{\sqrt{6}},\dfrac{y}{\sqrt{6}},\dfrac{y}{\sqrt{6}}\right)+$ $+\left(0,-\dfrac{z}{\sqrt{2}},\dfrac{z}{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow(1,0,0)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}-\dfrac{2y}{\sqrt{6}},\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{y}{\sqrt{6}}-\dfrac{z}{\sqrt{2}},\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{y}{\sqrt{6}}+\dfrac{z}{\sqrt{2}}\right)$. Obtém-se

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{2y}{\sqrt{6}} = 1 \\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{y}{\sqrt{6}} - \dfrac{z}{\sqrt{2}} = 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{y}{\sqrt{6}} + \dfrac{z}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{2} - 2y = \sqrt{6} \\ x\sqrt{2} + y - z\sqrt{3} = 0 \\ x\sqrt{2} + y + z\sqrt{3} = 0 \end{cases}.$$ Resolvendo o sistema, obtém-se $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $y = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ e z=0, logo, $\mathbf{E}_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{u}_1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3$. $|\mathbf{E}_1| = \sqrt{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1.$$

<u>Exemplo</u> - O vector $\mathbf{E}_1 = (1,0,0)$ de $\Re^3$ pode ser expresso como combinação linear dos vectores da base $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, referidos no penúltimo exemplo, mas não é unitário nessa base. De facto: $\mathbf{E}_1 = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 \Leftrightarrow (1,0,0) = x(1,1,1) + y(0,1,1) + z(0,0,1) \Leftrightarrow (1,0,0) = (x,x,x) + (0,y,y) + (0,0,z) \Leftrightarrow (1,0,0) = (x, x+y, x+y+z)$, isto é,

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$ Resolvendo o sistema, obtém-se $x = 1$, $y = -1$ e $z = 0$, logo,

$\mathbf{E}_1 = 1\mathbf{v}_1 - 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$ e $|\mathbf{E}_1| = \sqrt{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 1$.

Forma Quadrática em $\mathbf{E}^n$.

Dado um espaço vectorial $\mathbf{E}^n$, de base $\mathbf{S} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n\}$, chama-se *forma quadrática*, ao polinómio homogéneo de segundo grau nas componentes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ de um vector $\mathbf{X}$, desse espaço, relativamente à base $\mathbf{S}$.

Forma Quadrática no Plano.

A matriz simétrica real: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ associa ao vector $\mathbf{X}_S = (x_1, x_2)$ de $\Re^2$, referido à base ortonormal $\mathbf{S} = \{\mathbf{E}_1 = (1,0), \mathbf{E}_2 = (0,1)\}$, o polinómio seguinte $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S =$

$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2$ que é um polinómio homogéneo do segundo grau em x_1 e x_2, chamado forma quadrática do plano. A cada vector $\mathbf{X}_S$ corresponde um número real: $p = \mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S$.

<u>Exemplo</u> - A matriz simétrica real: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$ define em $\Re^2$ a seguinte forma quadrática $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4x_1^2 - 3x_2^2 + 24x_1x_2$. Ao vector $\mathbf{X}_S = (1,2)$, por exemplo, corresponde o número real: $p = 4 \times 1^2 - 2 \times 2^2 + 24 \times 1 \times 2 =$ $= 4 - 12 + 48 = 40$.

Redução da Forma Quadrática no Plano à Forma Canónica.

Designando a forma quadrática no plano, $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S$, por $p(\mathbf{X})$, pode exprimir-se essa forma quadrática por $p(\mathbf{X}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$, onde λ_1 e λ_2 são os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$ e (x_1, x_2) as componentes do vector $\mathbf{X}$ na base $\mathbf{P} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$, sendo $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ os vectores próprios associados a λ_1 e λ_2. De facto: $p(\mathbf{X}) = \mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S$. Tendo em vista que $\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica real, pode escrever-se: $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}$, sendo $\mathbf{D}$ a matriz diagonal cujos elementos são os valores próprios λ_1 e λ_2, e $\mathbf{P}$ a matriz ortogonal formada pelos vectores próprios unitários $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$, associados a λ_1 e λ_2.
$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$. Substituindo $\mathbf{A}$ por $\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ em $p(\mathbf{X}) = \mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S$, tem-se $p(\mathbf{X}) = \mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_S$ ou $p(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{P})\mathbf{D}(\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_S)$. Fazendo $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_S = \mathbf{X}_P$ ou $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} = \mathbf{X}_P{}^{\mathrm{T}}$, vem $p(\mathbf{X}) = \mathbf{X}_P{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{X}_P$.
Mas $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{X}_P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, logo $p(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e, finalmente, $p(\mathbf{X}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$. Assim $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S = \mathbf{X}_P{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{X}_P$ ou $ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2 =$ $= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$. A forma $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$ é denominada *forma canónica* da forma quadrática no plano.

<u>Exemplo</u> – A forma quadrática: $p(\mathbf{X})=4x_1{}^2-3x_2{}^2+24x_1x_2$ pode ser expressa por $p(\mathbf{X})=-12x_1{}^2+13x_2{}^2$.

De facto,

I) A forma quadrática $p(\mathbf{X})=4x_1{}^2-3x_2{}^2+24x_1x_2$ é definida pela matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 12\\ 12 & -3\end{bmatrix}$. Mas, os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$ são $\lambda_1=-12$ e $\lambda_2=13$, pois $\det[\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}]=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}4 & 12\\ 12 & -3\end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}4-\lambda & 12\\ 12 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0$, ou seja,

$(4-\lambda)(-3-\lambda)-12\times 12=0 \Leftrightarrow -12-4\lambda+3\lambda+\lambda^2-144=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-156=0$

e $\lambda=\dfrac{1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-156)}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{625}}{2}=\dfrac{1\pm 25}{2} \Leftrightarrow \lambda_1=-12 \vee \lambda_2=13$.

Então $p(\mathbf{X})=-12x_1{}^2+13x_2{}^2$.

II) Por outro lado, os vectores próprios unitários associados a λ_1 e λ_2 são, respectivamente, $\mathbf{X}_1=\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$ e $\mathbf{X}_2=\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$, pois, $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{X}=\mathbf{0}$, ou seja,

$\begin{bmatrix}4-\lambda & 12\\ 12 & -3-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$. Para $\lambda_1=-12$ tem-se $\begin{pmatrix}4-(-12) & 12\\ 12 & -3-(-12)\end{pmatrix}\times$

$\times\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}16 & 12\\ 12 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, obtendo-se assim $\begin{cases}16x_1+12x_2=0\\ 12x_1+9x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-\dfrac{12x_2}{16}=-\dfrac{3}{4}x_2\\ 12\left(-\dfrac{3}{4}x_2\right)+9x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{4}x_2\\ -9x_2+9x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{4}x_2\\ x_2=\forall\end{cases}$. Teremos então

$(x_1,x_2)=\left(-\dfrac{3}{4}x_2,x_2\right)=x_2\left(-\dfrac{3}{4},1\right)$. Achemos o vector unitário: $\|(x_1,x_2)\|=$

$=\sqrt{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2+1^2}=\sqrt{\dfrac{9}{16}+\dfrac{16}{16}}=\dfrac{5}{4} \Rightarrow \dfrac{\left(-\dfrac{3}{4},1\right)}{5/4}=\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$.

Para $\lambda_1 = 13$ tem-se $\begin{pmatrix} 4-13 & 12 \\ 12 & -3-13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

obtendo-se assim o sistema $\begin{cases} -9x_1 + 12x_2 = 0 \\ 12x_1 - 16x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{12x_2}{-9} = \dfrac{4}{3}x_2 \\ 12\left(\dfrac{4}{3}x_2\right) - 16x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3}x_2 \\ 16x_2 - 16x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3}x_2 \\ x_2 = \forall \end{cases}$. Tem-se então $(x_1, x_2) = \left(\dfrac{4}{3}x_2, x_2\right) =$

$= x_2\left(\dfrac{4}{3}, 1\right)$. Achemos o vector unitário: $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\dfrac{16}{9} + \dfrac{9}{9}} = \dfrac{5}{3}$,

obtendo $\dfrac{\left(\frac{4}{3}, 1\right)}{5/3} = \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$.

Teremos assim $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \overset{\downarrow}{\overbrace{-3/5}} & \overset{\downarrow}{\overbrace{4/5}} \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$. Então $\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$. Sendo

$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_S = \mathbf{X}_P$, e supondo que as componentes de $\mathbf{X}_S$ sejam $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$,

isto é, $\mathbf{X}_S = (1,2)$, vem $\begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}_P \Leftrightarrow \mathbf{X}_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, isto é, as

componentes de $\mathbf{X}_P$ são $x_1 = 1$ $\left(= -3/5 \times 1 + 4/5 \times 2\right)$ e $x_2 = 2$

$\left(= 4/5 \times 1 + 3/5 \times 2\right)$. Assim, $4x_1^2 - 3x_2^2 + 24x_1x_2 = -12x_1^2 + 13x_2^2$ e para

$\mathbf{X}_S = (1,2)$ tem-se $4 \times 1^2 - 3 \times 2^2 + 24 \times 1 \times 2 = -12 \times 1^2 + 13 \times 2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 - 12 + 48 = -12 + 52 \Leftrightarrow 40 = 40$.

Atenção – Não esquecer que (x_1, x_2) são as componentes de um vector $\mathbf{X}$ na base $\mathbf{P} = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$, isto é, neste caso, $\mathbf{P} = \left\{\left(-3/5, 4/5\right), \left(4/5, 3/5\right)\right\}$. Então definamos de que género terá que ser (x_1, x_2):

$(x_1, x_2) = x_1\left(-3/5, 4/5\right) + x_2\left(4/5, 3/5\right) = \left(-3/5\, x_1 + 4/5\, x_2, 4/5\, x_1 + 3/5\, x_2\right)$, ou seja, teremos assim $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 \\ x_2 = \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{3}{5}x_1 = \frac{4}{5}x_2 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{5}x_1 = \frac{4}{5}x_2 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{8}x_2 = \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}x_2\right) + \frac{3}{5}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 = \left(\frac{4}{10} + \frac{3}{5}\right)x_2 = \frac{5}{5}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 = \forall \end{cases}$. Então

$(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}x_2, x_2\right) = x_2\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ou $(x_1, x_2) = (x_1, 2x_1) = x_1(1,2)$.