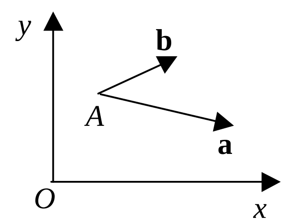
Capítulo VI

GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

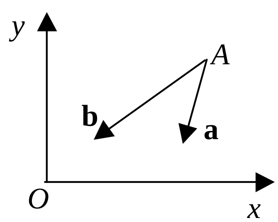
Capítulo VI

Sistema de Coordenadas no Plano.

Dois sistemas x, y de coordenadas rectangulares no plano dizem-se *igualmente orientados* se for possível transportar um destes sistemas rigidamente no plano até coincidir com o outro. Em caso contrário, diz-se que a orientação dos sistemas é *oposta*.

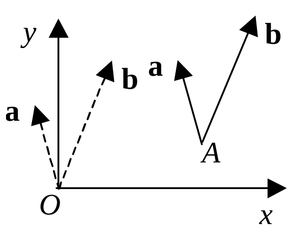


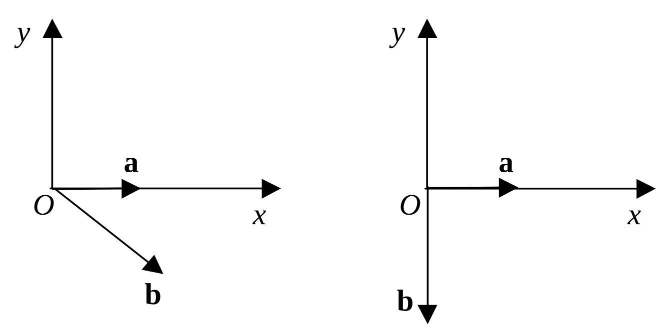
O sistema x, y da figura seguinte, por exemplo, não pode ser transportado rigidamente no plano de modo a coincidir com o sistema x, y da nova figura seguinte



. O que caracteriza os sistemas das duas figuras é que o eixo x coincidirá com o eixo y em resultado da rotação de ângulo $\frac{\pi}{2}$ do eixo x apenas se esta rotação se realizar no sentido anti-horário no primeiro caso e no sentido horário, no segundo.

O conceito de orientação pode ser estendido a qualquer par ordenado de vectores não colineares. Assim, dado um sistema de coordenadas rectangulares x, y, seja $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ - por esta ordem – um par de vectores não colineares com origem num ponto A. Consideremos a transformação do par $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ - num par de vectores ortogonais – constituida das seguintes etapas:





Na primeira etapa o par $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ transporta-se rigidamente no plano de modo que A coincida com O. Na segunda, efectua-se a rotação do par $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ até que $\mathbf{a}$ adquira a direcção e o sentido de x. Na terceira, efectua-se a rotação de $\mathbf{b}$ - sem que o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ se torne igual a 0 ou a π - até que $\mathbf{b}$ resulte compreendido no eixo y. Se o sentido do vector $\mathbf{b}$ que resulta desta transformação coincidir com a orientação de y - isto é, se $\mathbf{b}$ pertencer ao semi-plano superior após as duas primeiras etapas da transformação – diz-se que o par $\mathbf{a},\mathbf{b}$ e o sistema $x\,,y$ são igualmente orientados.

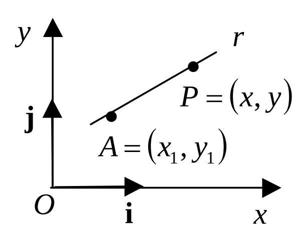
Sejam $\mathbf{i},\mathbf{j}$ os vectores unitários que têm a mesma direcção e sentido que os eixos $x\,,y$, respectivamente. Um vector arbitrário de coordenadas (x,y) pode então ser expresso na forma $(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$. Para o verificar, basta observar que $\mathbf{i}=(1,0)$, $\mathbf{j}=(0,1)$, e então tem-se $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}=x(1,0)+y(0,1)=(x,0)+(0,y)=(x,y)$.

Identificação de $\mathbf{E}^2$ com o Plano Euclidiano.

Denomina-se produto escalar ou interno de dois vectores $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2)$ de E^2 real – as coordenadas $x_i\,,y_i$ sendo, por conseguinte, números reais neste caso, poderiam ser complexos - o número $(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=x_1y_1+x_2y_2$. Portanto, se definirmos o produto escalar em $\mathbf{E}^2$ passamos a falar também em *plano euclidiano*.

Equações Paramétricas e Cartesiana da Recta.

Sejam $(0,\mathbf{i},\mathbf{j})$ um sistema de coordenadas, $P=(x,y)$ e $A=(x_1,y_1)$ um ponto genérico e um ponto dado, respectivamente, da recta r, e $\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ um vector com a mesma direcção de r:



. Da *equação vectorial* da recta r: $P=A+t\mathbf{v}$ (A recta r passa por um ponto A e tem a direcção de um vector não nulo $\mathbf{v}$. Para que um ponto P do plano pertença à recta r, é necessário e suficiente que os vectores $P-A$ e $\mathbf{v}$ sejam colineares: $P-A=t\mathbf{v}$, logo $P=A+t\mathbf{v}$), vem então $P-A=t\mathbf{v}$, isto é, $(x,y)-(x_1,y_1)=t(a\mathbf{i}+b\mathbf{j})\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x-x_1,y-y_1)=ta\mathbf{i}+tb\mathbf{j}\Leftrightarrow(x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}=ta\mathbf{i}+tb\mathbf{j}$, ou ainda: $\begin{cases}x-x_1=ta\\y-y_1=tb\end{cases}$

e $\begin{cases}x=x_1+ta\\y=y_1+tb\end{cases}$, nas quais a e b não são todos nulos ($\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$), são denominadas *equações paramétricas* da recta r, em relação ao sistema de coordenadas fixado. A recta r é o conjunto de todos os pontos (x,y) determinados pelas equações paramétricas quando t - denominado *parâmetro* – varia de $-\infty$ a $+\infty$.

<u>Exemplo</u> – As equações paramétricas da recta r que passa pelo ponto $A=(3{,}0)$ e tem a direcção do vector $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ são: $(x,y)-(3{,}0)=t(2\mathbf{i}+2\mathbf{j})\Leftrightarrow(x-3)\mathbf{i}+(y-0)\mathbf{j}=$ $=2t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=2t\\y-0=2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+2t\\y=2t\end{cases}$ - equações paramétricas.

Se a recta for determinada por dois pontos $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$, as equações paramétricas de r serão: $P=A+t(B-A)\Leftrightarrow(x,y)=(x_1,y_1)+t(x_2-x_1,y_2-y_1)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1)\\y=y_1+t(y_2-y_1)\end{cases}$.

<u>Exemplo</u> – As equações paramétricas da recta r que passa pelos pontos $A=(2{,}1)$ e $B=(4{,}0)$ são $P=A+t(B-A)\Leftrightarrow(x,y)=(2{,}1)+t(4-2{,}0-1)\Leftrightarrow(x,y)=(2{,}1)+$ $+(2t,-t)$ ou seja $\begin{cases}x=2+2t\\y=1-t\end{cases}$ - equações paramétricas.

A determinação da *equação cartesiana* faz-se a partir das paramétricas, determinando t e substituindo em $y=y_1+tb$. Logo teremos que, se $\begin{cases}x=x_1+ta\\y=y_1+tb\end{cases}$ vem $\begin{cases}t=\dfrac{x-x_1}{a}\\y=y_1+\left(\dfrac{x-x_1}{a}\right)b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{———}\\y-y_1=\dfrac{b}{a}(x-x_1)\end{cases}$. Teremos assim a equação cartesiana da recta r: $y-y_1=\dfrac{b}{a}(x-x_1)$.

<u>Exemplo</u> – A equação cartesiana da recta r que passa pelo ponto $A=(3{,}0)$ e tem a direcção do vector $\mathbf{v}=(2{,}2)$ será determinada através das equações paramétricas:

$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2t \end{cases}$, como vimos atrás, logo $t = \dfrac{x-3}{2}$ e $y = \dfrac{x-3}{2}2 \Leftrightarrow y - 0 = \dfrac{2}{2}(x-3)$, ou, se quisermos, $y = x - 3$.

Se a recta for determinada por dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, as equações paramétricas serão, como vimos, $\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$ e então: $t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, logo

$y = y_1 + \left(\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)(y_2 - y_1)$, então $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

<u>Exemplo</u> – A equação cartesiana da recta r que passa pelos pontos $A = (2,1)$ e $B = (4,0)$ será determinada através das equações paramétricas: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$. Logo, teremos $t = \dfrac{x-2}{2}$ e $y = 1 - \dfrac{x-2}{2} \Leftrightarrow y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x-2)$.

Ângulo de Duas Rectas.

Seja uma recta r, que passa por um ponto $A_1 = (x_1, y_1)$ e tem a direcção de um vector $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$, expressa pelas equações: $\dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{b_1}$ - equações da recta sob a forma simétrica. Seja, ainda, uma recta s, que passa por um ponto $A_2 = (x_2, y_2)$ e tem a direcção de um vector $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$, expressa pelas equações $\dfrac{x - x_2}{a_2} = \dfrac{y - y_2}{b_2}$. O *ângulo* θ das rectas r e s é o mesmo ângulo dos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ que definem as direcções dessas rectas, isto é, o ângulo θ é dado por: $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} =$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \times \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Exemplo – Calcule o ângulo que a recta r, expressa pelas equações: $\frac{x-4}{6}=\frac{y}{3}$, forma com a recta s, dada pelas equações: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{4}$.

As componentes do vector $\mathbf{u}$ que define a direcção da recta r são: $\begin{matrix} a_1 = 6 \\ b_1 = 3 \end{matrix}$. As componentes do vector $\mathbf{v}$ que define a direcção da recta s são: $\begin{matrix} a_2 = 1 \\ b_2 = 4 \end{matrix}$. O ângulo θ das rectas r e s é o mesmo ângulo dos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, isto é, $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} =$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1{}^2 + b_1{}^2}\times\sqrt{a_2{}^2 + b_2{}^2}} = \frac{6\times 1 + 3\times 4}{\sqrt{6^2+3^2}\times\sqrt{1^2+4^2}} = \frac{18}{\sqrt{36+9}\times\sqrt{1+16}} = \frac{18}{\sqrt{45}\times\sqrt{17}} =$$

$$= \frac{18}{3\sqrt{5}\times\sqrt{17}} = \frac{18}{3\sqrt{85}} = \frac{6\sqrt{85}}{85}.$$ Logo $\theta = \arccos\left(\frac{6\sqrt{85}}{85}\right) = 49{,}4°$.

Paralelismo Entre Duas Rectas.

A condição de paralelismo entre duas rectas r e s é a mesma dos vectores $\mathbf{u}=(a_1,b_1)$ e $\mathbf{v}=(a_2,b_2)$ que definem as direcções dessas rectas, isto é: $\mathbf{u}=m\mathbf{v}$ ou $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

Exemplo – A recta r que passa pelos pontos $A_1=(-3{,}4)$ e $B_1=(5{,}-2)$ e a recta s que passa pelos pontos $A_2=(-1{,}2)$ e $B_2=(-5{,}5)$ são paralelas. De facto, as equações da recta r são: $\frac{x+3}{8}=\frac{y-4}{-6}$ e as equações da recta s são: $\frac{x+1}{-4}=\frac{y-2}{3}$. Os parâmetros directores da recta r são: $\begin{matrix} a_1 = 8 \\ b_1 = -6 \end{matrix}$ e os parâmetros directores da recta s são: $\begin{matrix} a_2 = -4 \\ b_2 = 3 \end{matrix}$. A condição de paralelismo de duas rectas é: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ e neste caso $\frac{8}{4}=\frac{-6}{3}$, o que prova serem paralelas as rectas r e s.

Se tivermos uma recta r, que passa por um ponto $A_1 = (x_1, y_1)$ e tem a direcção de um vector $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$, ela é expressa pelas equações: $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1}$. Qualquer recta s, paralela à recta r, tem parâmetros directores a_2, b_2 proporcionais aos parâmetros directores a_1, b_1 de r. Em particular, a_1, b_1 são parâmetros directores de qualquer recta paralela à recta r. Nestas condições, se $A_2 = (x_2, y_2)$ é um ponto qualquer do plano, a equação da recta paralela à recta r, que passa por A_2, é: $\frac{x - x_2}{a_1} = \frac{y - y_2}{b_1}$.

Ortogonalidade Entre Duas Rectas.

A condição de ortogonalidade das rectas r e s é a mesma dos vectores $\mathbf{u} = (a_1, b_1)$ e $\mathbf{v} = (a_2, b_2)$ que definem as direcções dessas rectas, isto é: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ou $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

<u>Exemplo</u> – A rectas r expressa pelas equações: $\frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{-6}$ e a recta s expressa pelas equações: $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{5}$ são ortogonais. De facto: as componentes do vector $\mathbf{u}$ que define a direcção da recta r são: $\begin{matrix} a_1 = 8 \\ b_1 = -6 \end{matrix}$ e as componentes do vector $\mathbf{v}$ que define a direcção da recta s são: $\begin{matrix} a_2 = 3 \\ b_2 = 5 \end{matrix}$. A condição de ortogonalidade de duas rectas é $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, isto é, $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$. No caso presente: $8 \times 3 - 6 \times 5 = 24 - 30 = -6 \neq 0$ o que prova que as rectas r e s não são ortogonais.

Distância Entre Dois Pontos.

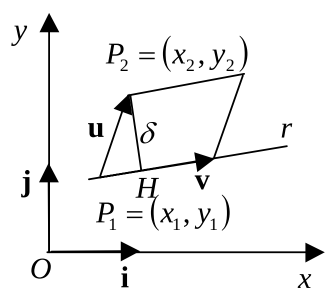
A distância δ entre os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ é calculada de acordo com a fórmula $\delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Exemplo – Calcule a distância entre os pontos $A=(7,3)$ e $B=(1,0)$.

A distância δ entre os pontos A e B é: $\delta=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. De acordo com os dados do problema: $x_1=7$, $x_2=1$, $y_1=3$, $y_2=0$. Logo, $\delta=$ $=\sqrt{(1-7)^2+(0-3)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

Distância Entre Um Ponto e Uma Recta.

Sejam um ponto $P_2=(x_2,y_2)$ e uma recta r expressa pela equação $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$. A recta r, como se sabe, passa pelo ponto $P_1=(x_1,y_1)$ e tem a direcção do vector $\mathbf{v}=(a,b)$. A distância δ do ponto P_2 à recta r é medida sobre a perpendicular à recta r que passa por P_2:



. A figura mostra que a distância δ do ponto P_2 à recta r é a altura do paralelogramo cujos lados são os vectores $\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ e $\mathbf{u}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=$ $=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}$. A recta r passa por $P_1=(x_1,y_1)$ e tem a direcção do vector $\mathbf{v}=(a,b)$. As equações paramétricas são $(x,y)-(x_1,y_1)=t(a,b)\Leftrightarrow(x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}=ta\mathbf{i}+tb\mathbf{j}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x-x_1=ta\\ y-y_1=tb\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_1+ta\\ y=y_1+tb\end{cases}$. Se determinarmos $t=\dfrac{x-x_1}{a}$ e $t=\dfrac{y-y_1}{b}$, podemos obter $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$, a equação da recta na forma simétrica. Mas $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x-x_1)b=a(y-y_1)\Leftrightarrow xb-x_1b=ay-ay_1\Leftrightarrow bx-ay+bx_1-ay_1=0$. Se fizermos $b=A$, $-a=B$ e $bx_1-ay_1=C$, obtemos a equação $Ax+By+C=0$, denominada a *equação geral da recta*.

Vamos considerar que a recta r tem então a equação $Ax+By+C=0$, sendo $H=(x_3,y_3)$ o pé da perpendicular traçada de P_2 para r, então $\delta=\text{distância}=|\mathbf{P}_2\mathbf{H}|$. Um vector perpendicular à recta r, será então $\mathbf{R}=(A,B)$. Este vector é colinear com $\mathbf{P}_2\mathbf{H}$ e, portanto, existe $k\in\Re$, tal que $\mathbf{P}_2\mathbf{H}=k\mathbf{R}$. Por outro lado, como

$H = P_2 + \mathbf{P_2H}$ vem, sucessivamente, $H = P_2 + k\mathbf{R} \Leftrightarrow (x_3, y_3) = (x_2, y_2) + k(A, B) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_2 + kA \\ y_3 = y_2 + kB \end{cases}$, com $k \in \Re$. E, como $H = (x_3, y_3) \in r$, as suas coordenadas verificam a equação da recta: $A\overbrace{(x_2 + kA)}^{x_3} + B\overbrace{(y_2 + kB)}^{y_3} + C = 0$ ou $Ax_2 + kA^2 + By_2 + kB^2 + C = 0$. Então $k = -\dfrac{Ax_2 + By_2 + C}{A^2 + B^2}$. Substituindo este valor k nas expressões $\begin{cases} x_3 = x_2 + kA \\ y_3 = y_2 + kB \end{cases}$ obtínhamos as coordenadas do pé H da perpendicular baixada do ponto para a recta.

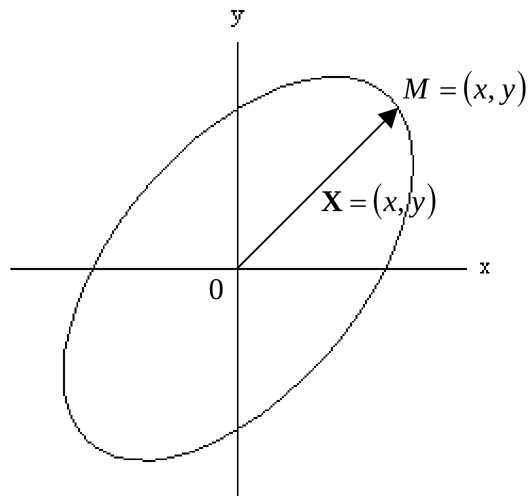
Voltando a $\mathbf{P_2H} = k\mathbf{R}$, tem-se $|\mathbf{P_2H}| = |k| \cdot |\mathbf{R}|$ e como $|\mathbf{P_2H}| = \delta$ e $|\mathbf{R}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, vem $\delta = \dfrac{|Ax_2 + By_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, em que $Ax + By + C = 0$ é a equação geral da recta e (x_2, y_2) as coordenadas de um ponto P_2 que dista uma quantidade δ da recta r. Esta fórmula permite calcular directamente a distância de um ponto a uma recta.

<u>Exemplo</u> – A distância do ponto $P = (1,2)$ à recta de equação $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-3}{4}$ é calculada passando a equação para a fórmula geral: $(x+1)4 = 3(y-3) \Leftrightarrow 4x + 4 =$ $= 3y - 9 \Leftrightarrow 4x - 3y + 13 = 0$, logo $\delta = \dfrac{|4 \times 1 - 3 \times 2 + 13|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{11}{\sqrt{25}} = \dfrac{11}{5}$.

Cónicas.

Chama-se *cónica* a toda a curva plana que pode ser representada por uma equação do segundo grau em x e y: $ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$. Por outras palavras, cónica é o lugar geométrico dos pontos M do plano cujas coordenadas x e y, num sistema cartesiano ortogonal, satisfazem a equação do segundo grau: $ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$.

As coordenadas x e y do ponto M do plano são as componentes dos vectores $\mathbf{X} \in \Re^2$ que satisfazem a equação de uma cónica:



A equação de uma cónica $ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$ pode ser expressa do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d & 2e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0,$$

uma vez que $ax^2 + by^2 + 2cxy$ é uma forma quadrática no plano. Considerando : $\mathbf{X}_S = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ e $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2d \\ 2e \end{bmatrix}$, a equação anterior fica: $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_S + f = 0$, que é a equação de uma cónica sob a *forma matricial*. Tendo em vista que $\mathbf{X}_S = \mathbf{P}\mathbf{X}_P$ e que $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S = \mathbf{X}_P{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{X}_P$, de acordo com o que vimos no capítulo anterior, a equação $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_S + f = 0$ fica $\mathbf{X}_P{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{X}_P + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{X}_P + f = 0$. Mas: $\mathbf{X}_P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix}$.

Logo, $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d & 2e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$, isto é, a equação de uma cónica pode ser representada por $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + px + qy + f = 0$, na qual λ_1 e λ_2 são os valores próprios da matriz simétrica real $\mathbf{A}$, x e y as componentes dos vectores $\mathbf{X}_P$ na base $\mathbf{P} = \{\mathbf{X}_1 = (x_{11}, x_{12}), \mathbf{X}_2 = (x_{21}, x_{22})\}$, p e q dependem das componentes dos vectores próprios unitários $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$, associados a λ_1 e λ_2.

Equação Reduzida de Uma Cónica.

A equação de uma cónica pode ser expressa por $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + px + qy + f = 0$. Supondo λ_1 e λ_2 diferentes de zero, pode escrever-se $\lambda_1\left(x^2 + \dfrac{p}{\lambda_1}x\right) +$

$+\lambda_2\left(y^2+\frac{q}{\lambda_2}y\right)+f=0$ ou $\lambda_1\left(x^2+\frac{p}{\lambda_1}x+\frac{p^2}{4\lambda_1{}^2}\right)+\lambda_2\left(y^2+\frac{q}{\lambda_2}y+\frac{q^2}{4\lambda_2{}^2}\right)+f-$

$-\frac{p^2}{4\lambda_1}-\frac{q^2}{4\lambda_2}=0 \Leftrightarrow \lambda_1\left(x+\frac{p}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y+\frac{q}{2\lambda_2}\right)^2+f-\frac{p^2}{4\lambda_1}-\frac{q^2}{4\lambda_2}=0$. Fazendo

$f-\frac{p^2}{4\lambda_1}-\frac{q^2}{4\lambda_2}=-F$ e, através de uma translacção: $\begin{cases} x=x+\frac{p}{2\lambda_1} \\ y=y+\frac{q}{2\lambda_2}\end{cases}$, vem:

$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2-F=0$ e, finalmente, $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=F$.

A última equação é a *equação reduzida* de uma *cónica de centro* e, como se vê, o primeiro membro é a forma canónica da forma quadrática no plano.

Se um dos valores próprios for igual a zero, $\lambda_1=0$, por exemplo, a equação: $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+px+qy+f=0$, fica $\lambda_2y^2+px+qy+f=0$ ou $\lambda_2\left(y^2+\frac{q}{\lambda_2}y\right)+$

$+px+f=0$, isto é, $\lambda_2\left(y^2+\frac{q}{\lambda_2}y+\frac{q^2}{4\lambda_2{}^2}\right)+px+f-\frac{q^2}{4\lambda_2}=0 \Leftrightarrow \lambda_2\left(y+\frac{q}{2\lambda_2}\right)^2+$

$+p\left(x+\frac{f}{p}-\frac{q^2}{4p\lambda_2}\right)=0$. Fazendo, através de uma translacção: $\begin{cases} x=x+\frac{f}{p}-\frac{q^2}{4p\lambda_2} \\ y=y+\frac{q}{2\lambda_2}\end{cases}$,

vem $\lambda_2y^2+px=0$. Esta equação é a equação reduzida de uma cónica sem centro.

Se em vez de λ_1, fosse $\lambda_2=0$, a equação reduzida da cónica sem centro seria $\lambda_1x^2+qy=0$.

<u>Exemplo</u> **–** Determine a equação reduzida da cónica representada pela equação: $17x^2+12xy+8y^2-10x+20y+5=0$.

A equação da cónica sob a forma matricial é $\begin{bmatrix} x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -10 & 20\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}+5=0$. Fazendo $\mathbf{X}_S=\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8\end{bmatrix}$ e $\mathbf{N}=\begin{bmatrix} -10 \\ 20\end{bmatrix}$, a equação fica $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_S+5=0$.

Determinemos os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$: $\det\left[\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right]=\begin{vmatrix}17-\lambda & 6\\ 6 & 8-\lambda\end{vmatrix}=0$, isto é, $(17-\lambda)(8-\lambda)-36=0 \Leftrightarrow 136-17\lambda-8\lambda+\lambda^2-36=0 \Leftrightarrow \lambda^2-25+100=0$, isto é, $\lambda_1=5$ e $\lambda_2=20$.

Determinemos os vectores próprios unitários associados aos valores próprios: $\begin{bmatrix}17-\lambda & 6\\ 6 & 8-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$. Substituindo λ por 5 na matriz anterior, vem $\begin{bmatrix}12 & 6\\ 6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, isto é: $\begin{cases}12x_1+6x_2=0\\ 6x_1+3x_2=0\end{cases}$ e $\begin{cases}x_1=t\\ x_2=-2t\end{cases}$. Este resultado é obtido se resolvermos o sistema em ordem a x_1, e considerando depois $x_1=t$, uma incógnita qualquer. Podemos resolver o mesmo sistema da forma apresentada no capítulo anterior. Através de matrizes torna-se sempre mais fácil resolver o sistema em ordem à última incógnita, calculando as restantes em função desta.

Assim, $\mathbf{X}_{1t}=t(1,-2)$ são vectores próprios associados a $\lambda_1=5$. Fazendo $t=1/\sqrt{5}$ - ou seja, o inverso da norma de $(1,-2)$ - obtém-se o vector próprio unitário $\mathbf{X}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, associado a $\lambda_1=5$. Substituindo λ por 20 vem $\begin{bmatrix}-3 & 6\\ 6 & -12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, isto é, $\begin{cases}-3x_1+6x_2=0\\ 6x_1-12x_2=0\end{cases}$ e $\begin{cases}x_1=t\\ x_2=\dfrac{t}{2}\end{cases}$. Assim, $\mathbf{X}_{2t}=t\left(1,\frac{1}{2}\right)$ são vectores próprios associados a $\lambda_2=20$. Fazendo, $t=\dfrac{1}{\sqrt{5/4}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ obtém-se o vector próprio unitário $\mathbf{X}_2=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ associado a $\lambda_2=20$.

A matriz $\mathbf{A}$ é transformada na matriz $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 20\end{bmatrix}$ através da matriz ortogonal $\mathbf{P}$ cujos elementos são as componentes dos vectores próprios unitários $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$, associados a λ_1 e λ_2: $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\overbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\downarrow} & \overbrace{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\downarrow}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$. A equação

${\mathbf{X}_S}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_S + 5 = 0$ pode ser expressa, através de uma transformação ortogonal – rotação – por ${\mathbf{X}_P}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{X}_P + \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{X}_P + 5 = 0$. Considerando $\mathbf{X}_P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, vem $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 20 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 5 = 0$, isto é: $5x'^2 + 20y'^2 - \frac{50}{\sqrt{5}}x' + 5 = 0$ ou $5\left(x'^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}x'\right) + 20y'^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 5\left(x'^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}x' + 5\right) + 20y'^2 + 5 - 25 = 0 \Leftrightarrow 5\left(x' - \frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2 + 20y'^2 - 20 = 0$. Fazendo, através de uma translacção: $\begin{cases} x' = x' - \frac{5}{\sqrt{5}} \\ y' = y' \end{cases}$, a equação anterior fica: $5x'^2 + 20y'^2 - 20 = 0$ ou $5x'^2 + 20y'^2 = 20$, ou ainda $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1$.

Atenção! – O facto de utilizarmos x' e y', em vez de x e y, na equação reduzida serve apenas para realçar o que foi chamado à atenção no fim do capítulo V, isto é, que a forma reduzida só é idêntica à forma não reduzida, para determinados valores de (x, y) - ou (x', y').

Classificação das Cónicas.

A equação de uma cónica de centro é $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = F$. Se λ_1 e λ_2 forem do mesmo sinal, a cónica será do género *elipse*. Se λ_1 e λ_2 forem de sinais contrários, a cónica será do género *hipérbole*. A equação de uma cónica sem centro é: $\lambda_2 y^2 + px = 0$ ou $\lambda_1 x^2 + qy = 0$. Uma cónica representada por qualquer uma dessas equações é do género *parábola*.

<u>Exemplo</u> – Determine o género de cónica representada pela equação $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 10x + 20y + 5 = 0$.

Vimos que a equação reduzida desta cónica é $5x^2 + 20y^2 = 20$, que podemos afirmar ser a equação de uma elipse cujos semi-eixos são $CA = 2$ e $CB = 1$. Tendo em vista que $\mathbf{E}_1 = (1{,}0)$ e que $\mathbf{X}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ o ângulo θ correspondente à rotação é dado por. $\cos\theta = \frac{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{X}_1}{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{X}_1} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{X}_1 = 1 \times \frac{1}{\sqrt{5}} + 0 \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Por outro lado, para confirmarmos, $\mathbf{E}_2 = (0{,}1)$ e $\mathbf{X}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Logo, $\cos\theta = \frac{\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{X}_2}{|\mathbf{E}_2| \cdot |\mathbf{X}_2|} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{X}_2 =$

$= 0 \times \frac{2}{\sqrt{5}} + 1 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} = 63{,}43°$.

Temos assim a figura: .