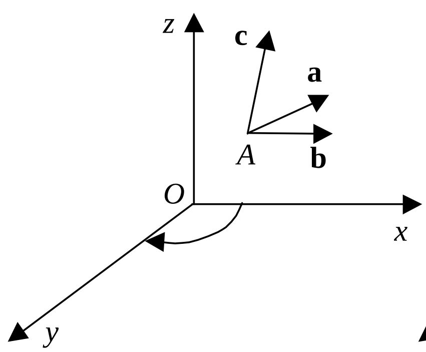
Capítulo VII

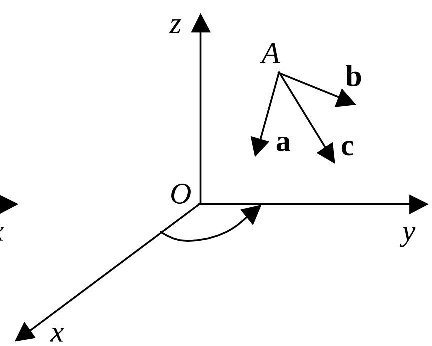
GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO

Capítulo VII

Sistema de Coordenadas no Espaço.

Dados dois sistemas x, y, z de coordenadas rectangulares em $\Re^3$, é possível, transportando um destes sistemas rigidamente no espaço, fazer coincidir dois dos eixos destes sistemas, digamos, os eixos x, y de um dos sistemas com os eixos x, y do outro. O sentido do eixo z de um dos sistemas pode, após tal transporte, coincidir com o sentido do eixo z do outro – o que implica a coincidência dos sistemas – ou ser oposto a este. Os sistemas dizem-se *igualmente orientados* no primeiro caso e de orientação *oposta*, no segundo. É fácil ver, por exemplo, que a orientação do sistema x, y, z da primeira figura que aqui é apresentada é oposta à orientação do sistema x, y, z





da segunda figura. Um sistema de coordenadas rectangulares diz-se *positivamente* ou *negativamente* orientado, conforme esteja orientado de acordo com o sistema x, y, z da segunda figura ou o sistema x, y, z da primeira figura. É fácil verificar, dado um sistema de coordenadas rectangulares x, y, z, que um observador colocado num ponto do semi-eixo positivo que observar o eixo y apontado para cima, observará o eixo x apontado para a direita, se o sistema de coordenados é positivamente orientado, e apontado para a esquerda, se o sistema é negativamente orientado. Este facto sugere um procedimento óbvio de determinação da orientação de qualquer sistema de coordenadas dado.

O conceito de orientação pode ser estendido a qualquer tripla ordenada de vectores não coplanares – isto é, não compreendida num plano ou em planos paralelos. Assim, dado um sistema de coordenadas rectangulares x, y, z, seja $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ - por esta ordem – uma tripla de vectores não coplanares com origem em A. Consideremos a transformação da tripla $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ que consiste em dar ao vector $\mathbf{b}$ uma rotação no plano definido pelos vectores $\mathbf{a},\mathbf{b}$, até que $\mathbf{b}$ se torne $\perp$ a $\mathbf{a}$ - sem que se tenha tornado colinear a $\mathbf{a}$ nesta transfornação, isto é, sem que o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ se tenha tornado igual a 0 ou a π - e, em seguida, em dar ao vector $\mathbf{c}$ uma rotação no espaço – sem que $\mathbf{c}$ corte o plano formado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ - até que $\mathbf{c}$ se torne perpendicular a este plano. Resulta, assim, uma tripla de vectores ortogonais $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$. Transportando rigidamente esta tripla no espaço, pode-se fazer coincidir os vectores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em direcção e sentido com os eixos x e y, respectivamente. Se, nestas condições, o sentido de $\mathbf{c}$ coincidir com o do eixo z, diz-se que a tripla de vectores $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ inicial e o sistema x, y são *igualmente orientados* – primeira figura – dizendo-se em caso contrário, que as orientações são *opostas* – segunda figura.

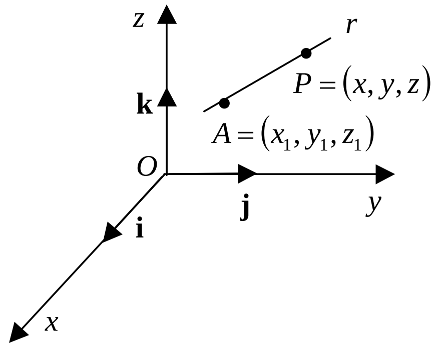
Sejam $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ os vectores unitários que têm a mesma direcção e sentido que os eixos x, y, z, respectivamente. Um vector arbitrário de coordenadas (x, y, z) pode então ser expresso na forma $(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Para o verificar, basta observar que $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$, então tem-se $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x(1,0,0) + y(0,1,0) +$ $+ z(0,0,1) = (x,0,0) + (0, y,0) + (0,0, z) = (x, y, z)$.

Identificação de $\mathbf{E}^3$ com o Espaço Euclidiano.

Denomina-se produto escalar ou interno de dois vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de E^3 real – as coordenadas x_i, y_i, z_i sendo, por conseguinte, números reais neste caso, embora pudessem ser complexos - o número $(x_1, x_2, x_3)\cdot(y_1, y_2, y_3) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Portanto, se definirmos o produto escalar em $\mathbf{E}^3$ passamos a falar também em *espaço euclidiano*.

Equações Paramétricas e Cartesianas da Recta.

Sejam $(0,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ um sistema de coordenadas, $P = (x, y, z)$ e $A = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto genérico e um ponto dado, respectivamente, da recta r, e $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ um vector



com a mesma direcção da recta r: . Da *equação vectorial* da recta r: $P = A + t\mathbf{v}$ (A recta r passa por um ponto A e tem a direcção de um vector não nulo $\mathbf{v}$. Para que um ponto P do espaço pertença à recta r, é necessário e suficiente que os vectores $P - A$ e $\mathbf{v}$ sejam colineares: $P - A = t\mathbf{v}$, logo $P = A + t\mathbf{v}$), vem então $P - A = t\mathbf{v}$, isto é, $(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)= = t(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}) \Leftrightarrow (x-x_1, y-y_1, z-z_1) = ta\mathbf{i}+tb\mathbf{j}+tc\mathbf{k}$ ou $(x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}+ +(z-z_1)\mathbf{k} = ta\mathbf{i}+tb\mathbf{j}+tc\mathbf{k}$, ou ainda: $\begin{cases} x-x_1 = ta \\ y-y_1 = tb \\ z-z_1 = tc \end{cases}$ e $\begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \\ z = z_1 + tc \end{cases}$, nas quais a, b e c não são todos nulos ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), são denominadas *equações paramétricas* da recta r, em relação ao sistema de coordenadas fixado. A recta r é o conjunto de todos os pontos (x,y,z) determinados pelas equações paramétricas quando t - denominado *parâmetro* – varia de $-\infty$ a $+\infty$.

<u>Exemplo</u> – As equações paramétricas da recta r que passa pelo ponto $A=(3,0,-5)$ e tem a direcção do vector $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ são: $(x,y,z)-(3,0,-5)=t(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-3)\mathbf{i}+(y-0)\mathbf{j}+(z+5)\mathbf{k} = 2t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}-t\mathbf{k} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=2t \\ y-0=2t \\ z+5=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2t \\ y=2t \\ z=-5-t \end{cases}$$

- são as equações paramétricas.

Se a recta for determinada por dois pontos $A=(x_1,y_1,z_1)$ e $B=(x_2,y_2,z_2)$, as equações paramétricas de r serão: $P = A + t(B-A) \Leftrightarrow (x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+$

$$+t(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + t(x_2-x_1) \\ y = y_1 + t(y_2-y_1) \\ z = z_1 + t(z_2-z_1) \end{cases}.$$

<u>Exemplo</u> – As equações paramétricas da recta r que passa pelos pontos $A=(2,1,-3)$ e $B=(4,0,-2)$ são $P=A+t(B-A)\Leftrightarrow (x,y,z)=(2,1,-3)+t(4-2,0-1,-2+3)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(2,1,-3)+(2t,-t,t)\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2t \\ y=1-t \\ z=-3+t \end{cases} \text{ - equações paramétricas.}$$

A determinação das *equações cartesianas* faz-se a partir das paramétricas, determinando t e substituindo em $y=y_1+tb$ e $z=z_1+tc$. Logo teremos que, se

$$\begin{cases} x=x_1+ta \\ y=y_1+tb \\ z=z_1+tc \end{cases} \text{ vem } \begin{cases} t=\dfrac{x-x_1}{a} \\ y=y_1+\left(\dfrac{x-x_1}{a}\right)b \\ z=z_1+\left(\dfrac{x-x_1}{a}\right)c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ y-y_1=\dfrac{b}{a}(x-x_1) \\ z-z_1=\dfrac{c}{a}(x-x_1) \end{cases}.$$

Teremos assim as equações cartesianas da recta r: $\begin{cases} y-y_1=\dfrac{b}{a}(x-x_1) \\ z-z_1=\dfrac{c}{a}(x-x_1) \end{cases}$.

<u>Exemplo</u> – As equações cartesianas da recta r que passa pelo ponto $A=(3,0,-5)$ e tem a direcção do vector $\mathbf{v}=(2,2,-1)$ será determinada através das equações paramétricas: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=2t \\ z=-5-t \end{cases}$, como vimos antes, logo $t=\dfrac{x-3}{2}$ e $y=\dfrac{x-3}{2}2$ e $z=-5-\left(\dfrac{x-3}{2}\right)$, ou, melhor, $y-0=\dfrac{2}{2}(x-3)$ e $z+5=-\dfrac{1}{2}(x-3)$ ou

$$\begin{cases} y=x-3 \\ z+5=-\dfrac{1}{2}(x-3) \end{cases}.$$

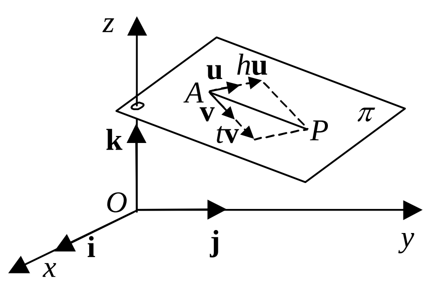
Se a recta for determinada por dois pontos $A=(x_1,y_1,z_1)$ e $B=(x_2,y_2,z_2)$, as equações paramétricas serão, como vimos, $\begin{cases} x=x_1+t(x_2-x_1) \\ y=y_1+t(y_2-y_1) \\ z=z_1+t(z_2-z_1) \end{cases}$ e então: $t=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$, logo $y = y_1 + \left(\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)(y_2 - y_1)$ e $y = z_1 + \left(\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)(z_2 - z_1)$, então, teremos,

$$\begin{cases} y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ z - z_1 = \dfrac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \end{cases}.$$

<u>Exemplo</u> – A equação cartesiana da recta r que passa pelos pontos $A = (2,1,-3)$ e $B = (4,0,-2)$ será determinada através das equações paramétricas: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -3 + t \end{cases}$. Logo, teremos $t = \dfrac{x-2}{2}$ e $y = 1 - \dfrac{x-2}{2}$ e $z = -3 + 1\dfrac{x-2}{2}$, isto é, $\begin{cases} y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x-2) \\ z + 3 = \dfrac{1}{2}(x-2) \end{cases}$

Equações Paramétricas e Cartesiana do Plano.

Seja A um ponto de um plano π e sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dois vectores não colineares, linearmente independentes, paralelos a π. Se P for um ponto genérico do plano π, teremos $P - A = h\mathbf{u} + t\mathbf{v}$:



. Quando h e t, que denominamos por *parâmetros*, variam de $-\infty$ a $+\infty$, P percorre o plano π. Então, a equação $P = A + h\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ é denominada *equação vectorial* do plano π.

Sejam $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ um sistema de coordenadas, $P = (x, y, z)$ e $A = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto genérico e um ponto dado, respectivamente, de um plano π, $\mathbf{u} = (a_3, b_3, c_3)$ e $\mathbf{v} = (a_4, b_4, c_4)$ dois vectores não colineares, paralelos a π. Da equação vectorial do plano π: $P = A + h\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, vem $P - A = h\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, ou $(x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k} =$

$= ha_3\mathbf{i} + hb_3\mathbf{j} + hc_3\mathbf{k} + ta_4\mathbf{i} + tb_4\mathbf{j} + tc_4\mathbf{k}$, ou ainda, $\begin{cases} x - x_1 = ha_3 + ta_4 \\ y - y_1 = hb_3 + tb_4 \\ z - z_1 = hc_3 + tc_4 \end{cases}$ e

$\begin{cases} x = x_1 + ha_3 + ta_4 \\ y = y_1 + hb_3 + tb_4 \\ z = z_1 + hc_3 + tc_4 \end{cases}$. Estas equações, nas quais $a_3, b_3, c_3, a_4, b_4, c_4$, não são todos nulos, são denominadas *equações paramétricas* do plano π, em relação ao sistema de coordenadas fixado.

O plano π é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) determinados pelas equações paramétricas quando h e t variam de $-\infty$ a $+\infty$

<u>Exemplo</u> – Determine as equações paramétricas do plano π que passa pelo ponto $A = (2,1,3)$ e é paralelo aos vectores $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Designando por $P = (x, y, z)$ um ponto genérico desse plano, tem-se: $P = A + h\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, isto é, $(x, y, z) = (2,1,3) + h(-3,-3,1) + t(2,1,-2)$. Quando h e t variam de $-\infty$ a $+\infty$, P percorre o plano π. Assim, se $h = 2$ e $t = 3$, por exemplo: $(x, y, z) = (2,1,3) +$ $+ 2(-3,-3,1) + 3(2,1,-2) = (2,1,3) + (-6,-6,2) + (6,3,-6) = (2,-2,-1)$. O ponto P é um ponto do plano π. Então se $(x, y, z) = (2,1,3) + h(-3,-3,1) + t(2,1,-2) \Leftrightarrow (x, y, z) =$ $= (2 - 3h + 2t, 1 - 3h + t, 3 + h - 2t)$ tem-se $\begin{cases} x = 2 - 3h + 2t \\ y = 1 - 3h + t \\ z = 3 + h - 2t \end{cases}$ - equações paramétricas.

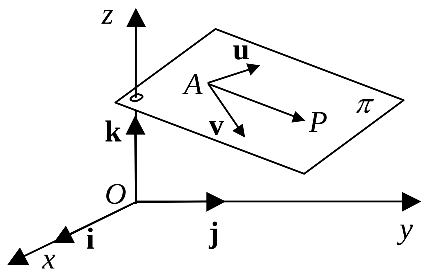
Se o plano π for determinado por três pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$, as equações paramétricas de π serão: $P = A + h(B - A) + t(C - A) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + h(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) + t(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, ou seja, $\begin{cases} x = x_1 + h(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + h(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + h(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1) \end{cases}$.

<u>Exemplo</u> – As equações paramétricas do plano que passa pelos pontos $A = (5,7,-2)$, $B = (8,2,-3)$ e $C = (1,2,4)$ são $P = A + h(B - A) + t(C - A) \Leftrightarrow (x, y, z) = (5,7,-2) +$

$+h(8-5,2-7,-3+2)+t(1-5,2-7,4+2)$ ou $(x,y,z)=(5,7,-2)+(3h,-5h,-h)+$

$+(-4t,-5t,6t)\Leftrightarrow \begin{cases} x=5+3h-4t \\ y=7-5h-5t \\ z=-2-h+6t \end{cases}$ - equações paramétricas.

A determinação da equação cartesiana ou geral do plano faz-se do seguinte modo: Sejam $(0,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ um sistema de coordenadas, $P=(x,y,z)$ e $A=(x_1,y_1,z_1)$ um ponto genérico e um ponto dado, respectivamente, de um plano π, $\mathbf{u}=(a_3,b_3,c_3)$ e $\mathbf{v}=(a_4,b_4,c_4)$ dois vectores não colineares paralelos a π:



. Se P é um ponto genérico do plano π, os vectores $P-A$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ são coplanares e o produto misto desses três vectores é nulo: $(P-A,\mathbf{u},\mathbf{v})=0$, isto é: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}=0$, e $\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix}(x-x_1)+$

$+\begin{vmatrix} c_3 & a_3 \\ c_4 & a_4 \end{vmatrix}(y-y_1)+\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}(z-z_1)=0$. Fazendo $\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_4 & c_4 \end{vmatrix}=a$, $\begin{vmatrix} c_3 & a_3 \\ c_4 & a_4 \end{vmatrix}=b$,

$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}=c$, vem $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ ou: $ax+by+cz-ax_1-by_1-$

$-cz_1=0$. Fazendo $-ax_1-by_1-cz_1=d$, vem, finalmente, $ax+by+cz+d=0$. Esta equação, na qual a, b e c não são simultaneamente nulos, é a *equação geral do plano* π, ou *equação cartesiana do plano*.

<u>Exemplo</u> – A equação geral do plano que passa pelo ponto $A=(2,1,3)$ e é paralela aos vectores $\mathbf{u}=-3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ é: $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$ ou $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\times$

$\times(x-2)+\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}(y-1)+\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}(z-3)=0$ ou $(6-1)(x-2)+(2-6)(y-1)+$

$+(-3+6)(z-3)=0\Leftrightarrow 5(x-2)-4(y-1)+3(z-3)=0\Leftrightarrow 5x-10y+4+3z-9=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x-4y+3z-15=0$.

A equação geral do plano π pode ser determinada eliminando os parâmetros h e t nas equações paramétricas.

Se o plano π for determinado por três pontos $A=(x_1,y_1,z_1)$, $B=(x_2,y_2,z_2)$ e $C=(x_3,y_3,z_3)$ e se $P=(x,y,z)$ é um ponto genérico de π, os vectores $P-A$, $B-A$ e $C-A$ são coplanares e o produto misto desses três vectores é nulo: $(P-A,B-A,C-A)=0$, isto é: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$, ou, de acordo com as propriedades dos determinantes: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$. O desenvolvimento do determinante conduzirá a uma equação do tipo: $ax+by+cz+d=0$.

Paralelismo Entre Dois Planos.

Sejam os planos π_1 e π_2 expressos, respectivamente, pelas equações: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ e $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. O vector $\mathbf{w}_1=(a_1,b_1,c_1)$ é normal ao plano π_1 e o vector $\mathbf{w}_2=(a_2,b_2,c_2)$ é normal ao plano π_2. A condição de paralelismo dos planos π_1 e π_2 é a mesma dos vectores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, isto é: $\mathbf{w}_1=m\mathbf{w}_2$ ou $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$.

<u>Exemplo</u> – Os planos π_1 e π_2 expressos, respectivamente, pelas equações: $8x-12y+16z-14=0$ e $2x-3y+4z+15=0$ são paralelos?

De facto, as componentes do vector $\mathbf{w}_1$, normal ao plano π_1, são: $a_1=8$, $b_1=-12$, $c_1=16$ e as componentes do vector $\mathbf{w}_2$, normal ao plano π_2, são: $a_2=2$, $b_2=-3$, $c_2=4$. A condição de paralelismo de dois planos é: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ e, neste caso: $\dfrac{8}{2}=\dfrac{-12}{-3}=\dfrac{16}{4}$, o que prova serem paralelos os planos π_1 e π_2.

Se, além das igualdades $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ se tiver também $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$, os planos π_1 e π_2 serão coincidentes porque, nesse caso, a equação de π_2 é obtida de π_1 mediante a multiplicação por um número, o que não altera a equação de π_1.

Em particular, se $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ e $d_1 \neq d_2$, os planos π_1 e π_2 também são paralelos.

Perpendicularidade Entre Dois Planos.

Sejam os planos π_1 e π_2 expressos, respectivamente, pelas equações: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ e $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$. O vector $\mathbf{w}_1=(a_1,b_1,c_1)$ é normal ao plano π_1 e o vector $\mathbf{w}_2=(a_2,b_2,c_2)$ é normal ao plano π_2. A condição de perpendicularidade dos planos π_1 e π_2 é a mesma condição de ortogonalidade dos vectores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, isto é: $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0$ ou $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

<u>Exemplo</u> – Os planos π_1 e π_2 expressos, respectivamente, pelas equações: $8x-2y+3z-8=0$ e $3x+6y-4z+7=0$ são perpendiculares?

De facto, as componentes do vector $\mathbf{w}_1$, normal ao plano π_1, são: $a_1=8$, $b_1=-2$, $c_1=3$ e as componentes do vector $\mathbf{w}_2$, normal ao plano π_2, são: $a_2=3$, $b_2=6$, $c_2=-4$. A condição de perpendicularidade dos dois planos é $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0$, isto é: $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$. No caso presente: $8\times 3-2\times 6-3\times 4=0$, o que prova serem perpendiculares os planos π_1 e π_2.

Paralelismo Entre Recta e Plano.

Seja uma recta r, de parâmetros directores $1, m, p$, expressa pelas equações: $\begin{cases} y = mx+n \\ z = px+q \end{cases}$. Seja um plano π expresso pela equação $ax+by+cz+d=0$. A recta r é paralela ao plano π se o vector $\mathbf{v}=(1,m,p)$, que define a direcção de r, for ortogonal ao vector $\mathbf{w} = (a, b, c)$, normal ao plano π, isto é, se: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ ou $a + bm + cp = 0$.

Exemplo – A recta r, expressa pelas equações $y = 4x - 15$ e $z = 3x + 4$, e o plano π, expresso pela equação: $7x + 2y - 5z - 9 = 0$ são paralelos?

De facto, as componentes do vector $\mathbf{v} = (1, m, p)$ que define a recta r - além de 1 – são: $\begin{matrix} m = 4 \\ p = 3 \end{matrix}$. As componentes do vector $\mathbf{w}$, normal ao plano, são: $a = 7$, $b = 2$, $c = -5$. A condição para que a recta r seja paralela ao plano π é que o vector $\mathbf{w}$, isto é: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ ou $a + bm + cp = 0$. Neste caso: $7 + 2 \times 4 - 5 \times 3 = 0$ o que prova ser a recta paralela ao plano π.

Perpendicularidade Entre Recta e Plano.

Seja uma recta r, de parâmetros directores $1, m, p$, expressa pelas equações: $\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$. Seja um plano π expresso pela equação $ax + by + cz + d = 0$. A recta r é perpendicular ao plano π se o vector $\mathbf{v} = (1, m, p)$, que define a direcção de r, for paralelo ao vector $\mathbf{w} = (a, b, c)$, normal ao plano π, isto é, se: $\mathbf{v} = t\mathbf{w}$ ou $\frac{1}{a} = \frac{m}{b} = \frac{p}{c}$.

Exemplo – A recta r expressa pelas equações: $\begin{matrix} y = 3x + 8 \\ z = 2x - 4 \end{matrix}$ e o plano π expresso pela equação $7x + 21y + 14z - 4 = 0$ são perpendiculares. De facto, as componentes do vector $\mathbf{v} = (1, m, p)$ que define a direcção da recta r - além de 1 – são: $\begin{matrix} m = 3 \\ p = 2 \end{matrix}$. As componentes do vector $\mathbf{w}$, normal ao plano π, são: $a = 7$, $b = 21$, $c = 14$. A condição para que a recta r seja perpendicular ao plano π é que o vector $\mathbf{v}$ seja paralelo ao vector $\mathbf{w}$, isto é: $\frac{1}{a} = \frac{m}{b} = \frac{p}{c}$. No caso presente: $\frac{1}{7} = \frac{3}{21} = \frac{2}{14}$, o que prova ser a recta r perpendicular ao plano π.

Intersecção de Dois Planos.

Sejam os planos π_1 e π_2, não paralelos, expressos pelas equações: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. A intersecção dos planos π_1 e π_2 é a recta r cujas equações reduzidas se deseja determinar – se tivermos as equações $\frac{y - y_1}{b} = \frac{x - x_1}{a} \Leftrightarrow y - y_1 = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_1 \Leftrightarrow y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_1 + y_1$, se $\frac{b}{a} = m$, então, $y = mx - \frac{b}{a}x_1 + y_1$, se $-\frac{b}{a}x_1 + y_1 = n$, vem, $y = mx + n$; se tivermos as equações $\frac{z - z_1}{c} = \frac{x - x_1}{a} \Leftrightarrow z - z_1 = \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x_1 \Leftrightarrow z = \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x_1 + z_1$, se $\frac{c}{a} = p$, então $z = px - \frac{c}{a}x_1 + z_1$, se $-\frac{c}{a}x_1 + z_1 = q$, vem $z = px + q$, que são as *equações reduzidas da recta*. O sistema constituido pelas duas equações gerais dos planos π_1 e π_2 é indeterminado, podendo exprimir-se duas variáveis em função de uma terceira: $\begin{cases} b_1y + c_1z = -a_1x - d_1 \\ b_2y + c_2z = -a_2x - d_2 \end{cases}$. Então $y = \frac{\begin{vmatrix} -a_1x - d_1 & c_1 \\ -a_2x - d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$ e $z = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & -a_1x - d_1 \\ b_2 & -a_2x - d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$.

Efectuadas as operações indicadas, as duas equações resultantes da aplicação de determinantes reduzem-se à forma $\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$, isto é, obtemos as equações reduzidas da recta r que passa pelo ponto $N = (0, n, q)$ e tem a direcção do vector $\mathbf{v} = (1, m, p)$.

<u>Exemplo</u> – Determine as equações reduzidas da recta r de intersecção dos planos π_1 e π_2, expressos, respectivamente, pelas equações: $5x - 2y + z + 7 = 0$ e $3x - 3y + z + 4 = 0$.

O sistema formado pelas equações dos planos π_1 e π_2 pode ser escrito do seguinte modo: $\begin{matrix} -2y + z = -5x - 7 \\ -3y + z = -3x - 4 \end{matrix}$, o que permite exprimir y e z em função de x:

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-5x-7 & 1\\ -3x-4 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-5x-7+3x+4}{-2+3}=-2x-3 \quad \text{e} \quad z=\frac{\begin{vmatrix}-2 & -5x-7\\ -3 & -3x-4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}}=$$

$=\dfrac{6x+8-15x-21}{-2+3}=-9x-13$. A recta r de intersecção dos planos π_1 e π_2 é expressa pelas equações $\begin{matrix} y=-2x-3 \\ z=-9x-13\end{matrix}$.

Distância Entre Dois Pontos.

A *distância* δ entre os pontos $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ e $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ é determinada de acordo com a seguinte fórmula: $\delta=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

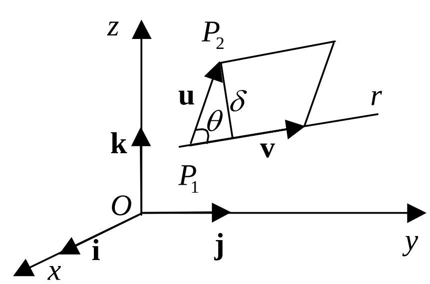
Exemplo – Calcule a distância entre os pontos $A=(7,3,4)$ e $B=(1,0,6)$.

A distância δ entre os pontos A e B é: $\delta=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$. De acordo com os dados do problema $\begin{matrix} x_1=7;\ x_2=1 \\ y_1=3;\ y_2=0 \\ z_1=4;\ z_2=6\end{matrix}$, logo: $\delta=$

$=\sqrt{(1-7)^2+(0-3)^2+(6-4)^2}=\sqrt{36+9+4}=\sqrt{49}=7$.

Distância de Um Ponto a Uma Recta.

Sejam um ponto $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ e uma recta r expressa pela equação: $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$. A recta r, como se sabe, passa pelo ponto $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ e tem a direcção do vector $\mathbf{v}=(a,b,c)$. A distância δ do ponto P_2 à recta r é medida sobre a perpendicular à recta r que passa por P_2:



A figura mostra que a distância δ do ponto P_2 à recta r é a altura do paralelogramo cujos lados são os vectores $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$. Tendo em vista a fórmula para calcular a área de um paralelogramo - $A = b \times h$ - e sabendo que a área é dada por $|\mathbf{v}| \cdot \delta$, sendo que $\delta = |\mathbf{u}| \sin\theta$, então a área é $|\mathbf{v}|\delta = |\mathbf{v}||\mathbf{u}|\sin\theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$, logo $\delta = \dfrac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$. Mas $\mathbf{u} \times \mathbf{v} =$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ b & c \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ c & a \end{vmatrix}\mathbf{j} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ a & b \end{vmatrix}\mathbf{k} \quad \text{e tem-se} \quad |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ c & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ a & b \end{vmatrix}^2}.$$

$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, logo obtém-se finalmente a fórmula

$$\delta = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ c & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ a & b \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

<u>Exemplo</u> – Calcule a distância do ponto $P = (2{,}0{,}7)$ à recta r expressa pelas equações: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{1}$.

A recta r passa pelo ponto P_1 cujas coordenadas são: $\begin{matrix} x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = -3 \end{matrix}$ e os parâmetros directores dessa recta são: $\begin{matrix} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{matrix}$. As coordenadas do ponto P são: $\begin{matrix} x_2 = 2 \\ y_2 = 0 \\ z_2 = 7 \end{matrix}$. A distância δ do ponto P à recta r é dada por $\delta =$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ c & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ a & b \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$ Obtemos assim $\delta =$

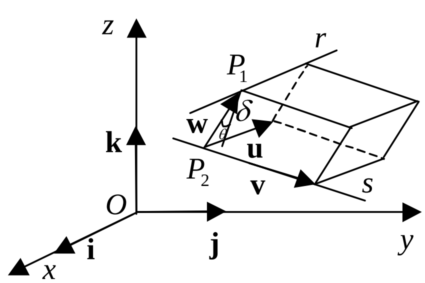
$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 0-2 & 7+3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 7+3 & 2-0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2-0 & 0-2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{4+4+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(-2-20)^2 + (20-2)^2 + (4+4)^2}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{484+324+64}}{3} = \frac{\sqrt{872}}{3}.$$

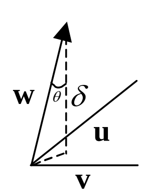
Distância Entre Duas Rectas.

Sejam as rectas r e s expressas, respectivamente, pelas equações: $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ e $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$. A recta r passa pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e tem a direcção do vector $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$. Se as rectas são *concorrentes*, a distância δ entre elas é, por definição, nula. Se as rectas são *paralelas*, a distância δ entre as rectas r e s é, nesse caso, a distância do ponto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ à recta que passa pelo ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e tem a direcção do vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ - que é a situação anteriormente apresentada.

Vejamos o que se passa quando se tem rectas *enviesadas*, e assim, que *não* estão no *mesmo plano*: os vectores $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{P_2P_1} =$ $= (x_1 - x_2)\mathbf{i} + (y_1 - y_2)\mathbf{j} + (z_1 - z_2)\mathbf{k}$ determinam um paralelipípedo cuja base é formada pelos vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e cuja altura é a distância δ entre as rectas r e s, porque a recta r é paralela ao plano da base do paralelipípedo, uma vez que a sua direcção é a do vector $\mathbf{u}$:



. Tendo em vista a fórmula utilizada para calcular o volume de um paralelipípedo, $V = A_{\text{base}} \times \text{altura}$, podemos ver que a altura do paralelipípedo é δ e como a base é um paralelogramo, $A_{\text{base}} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$, como já vimos antes, então $V = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|\delta$, mas como $\delta = |\mathbf{w}|\cos\theta$:



tem-se $\mathbf{v} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\theta =$ $= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ que é o produto misto de três vectores e $\delta = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$.

Mas $\quad (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix}$, $\quad \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\mathbf{i} +$

$+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$ e $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = \sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}$, logo tem-se

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

O determinante do numerador deve ser considerado em valor absoluto, tendo em vista que a distância é definida como um número real não negativo.

<u>Exemplo</u> – Calcule a distância entre a recta r expressa pelas equações: $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$, e a recta s, expressa pelas equações: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z}{2}$.

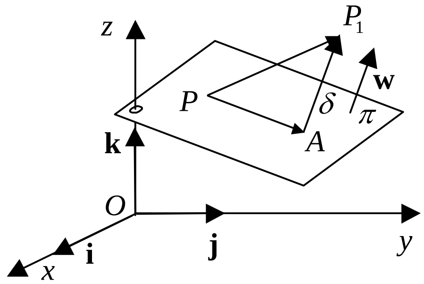
A recta r passa pelo ponto P_1 cujas coordenadas são: $\begin{matrix} x_1 = 2 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 1 \end{matrix}$ e os parâmetros directores dessa recta são: $\begin{matrix} a_1 = 3 \\ b_1 = 4 \\ c_1 = 2 \end{matrix}$. A recta s passa pelo ponto P_2 cujas coordenadas são: $\begin{matrix} x_2 = 4 \\ y_2 = 4 \\ z_2 = 0 \end{matrix}$ e os parâmetros directores dessa recta são: $\begin{matrix} a_2 = 1 \\ b_2 = 5 \\ c_2 = 2 \end{matrix}$. A distância δ entre as rectas r e s é $\delta = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$, isto é, $\delta =$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2-4 & 0-4 & 1-0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}^2}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(8-2)^2 + (2-6)^2 + (15-4)^2}} = \frac{15-16-8+20-4+24}{\sqrt{4+16+121}} =$$

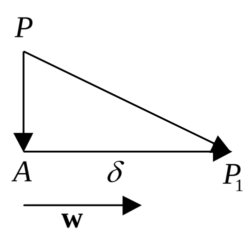
$$= \frac{31}{\sqrt{141}} = \frac{31\sqrt{141}}{141}.$$

Distância de Um Ponto a Um Plano.

Sejam um ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e um plano π expresso pela equação: $ax + by + cz + d = 0$. Sejam A o pé da perpendicular conduzida por P_1 sobre o plano π e $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer desse plano:



. O vector $\mathbf{w} = (a, b, c)$ é normal ao plano π e, por conseguinte, o vector $\mathbf{AP}_1$ tem a mesma direcção de $\mathbf{w}$. A distância do ponto P_1 ao plano π é: $\delta = |\mathbf{AP}_1|$. $\mathbf{AP}_1$ é a projecção do vector $\mathbf{PP}_1$ na direcção do vector $\mathbf{w}$. Vejamos agora o seguinte:



, tendo em vista que $\mathbf{AP}_1$ e $\mathbf{w}$ têm a mesma direcção, pode considerar-se $\mathbf{AP}_1 = a\mathbf{w}$. Assim, $\mathbf{PP}_1 = \mathbf{PA} + \mathbf{AP}_1$, isto é $\mathbf{PP}_1 = \mathbf{PA} + a\mathbf{w}$. Se multiplicarmos ambos os termos por $\mathbf{w}$, vem $\mathbf{PP}_1 \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{PA} + a\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{PA} \cdot \mathbf{w} + a\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$, e assim $\mathbf{PP}_1 \cdot \mathbf{w} = a\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{PP}_1 \cdot \mathbf{w} = a|\mathbf{w}|^2 = a$, sendo o vector $\mathbf{w}$ unitário. Como tínhamos definido $\mathbf{AP}_1 = a \cdot \mathbf{w}$ vem $\mathbf{AP}_1 = (\mathbf{PP}_1 \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}$ e então $|\mathbf{AP}_1| = |\mathbf{PP}_1 \cdot \mathbf{w}|$. Se o vector $\mathbf{w}$ não for unitário, deve considerar-se o seu versor: $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$, logo ter-se-á: $|\mathbf{AP}_1| = \left|\mathbf{PP}_1 \cdot \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}\right|$ que nos dá a projecção do vector $\mathbf{PP}_1$ na direcção de $\mathbf{w}$. Mas $\mathbf{PP}_1 =$ $= (x_1 - x)\mathbf{i} + (y_1 - y)\mathbf{j} + (z_1 - z)\mathbf{k}$, $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{1}{|\mathbf{w}|}\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})$, logo:

$\delta = \frac{|a(x_1 - x) + b(y_1 - y) + c(z_1 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - ax - by - cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Como o ponto P pertence ao plano $\pi: -ax - by - cz = d$, e $\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

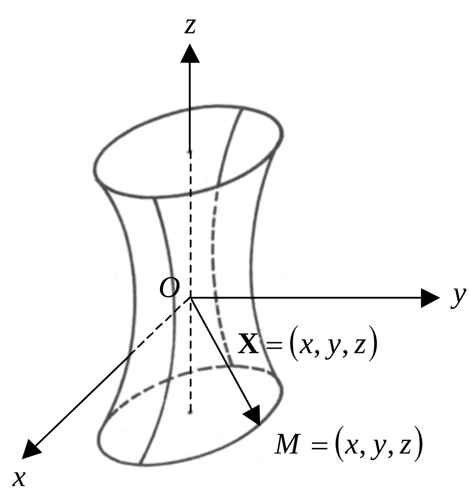
<u>Exemplo</u> – Calcule a distância do ponto $P = (-4,2,5)$ ao plano $2x + y + 2z + 8 = 0$.

As componentes do vector $\mathbf{w}$, normal ao plano dado, são: $\begin{matrix} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{matrix}$ e o valor de d é: $d = 8$. As coordenadas do ponto P são: $\begin{matrix} x_1 = -4 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = 5 \end{matrix}$. A distância do ponto P ao plano dado é, então, $\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, isto é: $\delta = \frac{|-2 \times 4 + 1 \times 2 + 2 \times 5 + 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} =$

$= \frac{|-8 + 2 + 10 + 8|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{12}{3} = 4$.

Quádricas.

Chama-se *quádrica* a toda a superfície que pode ser representada por uma equação do segundo grau em x, y e z: $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2mx + 2ny + 2pz + q = 0$. Em outras palavras, quádrica é o lugar geométrico dos pontos M do espaço tridimensional cujas coordenadas x, y e z, num sistema cartesiano ortogonal, satisfazem a equação do segundo grau: $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2mx + 2ny + 2pz + q = 0$.



As coordenadas x, y e z do ponto M do espaço são as componentes dos vectores $\mathbf{X} \in \Re^3$ que satisfazem a equação de uma quádrica:

A equação de uma quádrica $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2mx + 2ny +$ $+ 2pz + q = 0$ pode ser expressa do seguinte modo: $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \times$ $\times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m & 2n & 2p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + q = 0$, uma vez que $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ é uma forma quadrática no espaço tridimensional. Considerando $\mathbf{X}_S = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$ e $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 2m \\ 2n \\ 2p \end{bmatrix}$, a equação anterior fica: $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{X}_S + \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{X}_S + q = 0$, que é a equação de uma quádrica sob a *forma matricial*. Tendo em vista que $\mathbf{X}_S = \mathbf{P}\mathbf{X}_P$ e que, de acordo com o que vimos no capítulo anterior, $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{X}_S = \mathbf{X}_P{}^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{X}_P$, a equação $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{X}_S + \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{X}_S + q = 0$ fica simplesmente $\mathbf{X}_P{}^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{X}_P + \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \mathbf{X}_P + q = 0$. Mas: $\mathbf{X}_P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix}$. Logo ter-se-á, $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m & 2n & 2p \end{bmatrix} \times$ $\times \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + q = 0$, isto é, a equação de uma quádrica pode ser representada por $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + rx + sy + tz + q = 0$, na qual λ_1, λ_2 e λ_3 são os valores próprios da matriz simétrica real $\mathbf{A}$, x, y e z as componentes dos vectores $\mathbf{X}_P$ na base $\mathbf{P} = \{\mathbf{X}_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}), \mathbf{X}_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}), \mathbf{X}_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33})\}$, r, s e t dependem das componentes dos vectores próprios unitários $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ e $\mathbf{X}_3$, associados a λ_1, λ_2 e λ_3.

Equação Reduzida de Uma Quádrica.

A equação de uma quádrica pode ser expressa por $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + rx + sy + tz + {}$ $+ q = 0$. Supondo λ_1, λ_2 e λ_3 diferentes de zero, pode escrever-se $\lambda_1\left(x^2 + \frac{r}{\lambda_1}x\right) +$ $+ \lambda_2\left(y^2 + \frac{s}{\lambda_2}y\right) + \lambda_3\left(z^2 + \frac{t}{\lambda_3}z\right) + q = 0$, isto é, $\lambda_1\left(x^2 + \frac{r}{\lambda_1}x + \frac{r^2}{4\lambda_1{}^2}\right) +$ $\lambda_2\left(y^2 + \frac{s}{\lambda_2}y + \frac{s^2}{4\lambda_2{}^2}\right) + \lambda_3\left(z^2 + \frac{t}{\lambda_3}z + \frac{t^2}{4\lambda_3{}^2}\right) + q - \frac{r^2}{4\lambda_1} - \frac{s^2}{4\lambda_2} - \frac{t^2}{4\lambda_3} = 0$, ou seja, $\lambda_1\left(x + \frac{r}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y + \frac{s}{2\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(z + \frac{t}{2\lambda_3}\right)^2 + q - \frac{r^2}{4\lambda_1} - \frac{s^2}{4\lambda_2} - \frac{t^2}{4\lambda_3} = 0$. Fazendo $q - \frac{r^2}{4\lambda_1} - \frac{s^2}{4\lambda_2} - \frac{t^2}{4\lambda_3} = -Q$ e, através de uma translacção: $\begin{cases} x = x + \dfrac{r}{2\lambda_1} \\ y = y + \dfrac{s}{2\lambda_2} \\ z = z + \dfrac{t}{2\lambda_3} \end{cases}$, vem:

$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 - Q = 0$ e, finalmente, $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = Q$.

Esta última equação é a *equação reduzida* de uma *quádrica de centro* e, como se vê, o primeiro membro é a forma canónica da forma quadrática no espaço tridimensional.

Se um dos valores próprios for igual a zero, $\lambda_1 = 0$, por exemplo, a equação: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + rx + sy + tz + q = 0$, fica $\lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + rx + sy + tz + q = 0$, isto é, $\lambda_2\left(y^2 + \frac{s}{\lambda_2}y\right) + \lambda_3\left(z^2 + \frac{t}{\lambda_3}z\right) + rx + q = 0 \Leftrightarrow \lambda_2\left(y^2 + \frac{s}{\lambda_2}y + \frac{s^2}{4\lambda_2{}^2}\right) +$ $\lambda_3\left(z^2 + \frac{t}{\lambda_3}z + \frac{t^2}{4\lambda_3{}^2}\right) + rx + q - \frac{s^2}{4\lambda_2} - \frac{t^2}{4\lambda_3} = 0 \Leftrightarrow \lambda_2\left(y^2 + \frac{s}{\lambda_2}y\right) + \lambda_3\left(z^2 + \frac{t}{\lambda_3}z\right) +$ $+ r\left(x + \frac{q}{r} - \frac{s^2}{4r\lambda_2} - \frac{t^2}{4r\lambda_3}\right) = 0$. Fazendo, através de uma translacção:

$\begin{cases} x = x + \dfrac{q}{r} - \dfrac{s^2}{4r\lambda_2} - \dfrac{t^2}{4r\lambda_3} \\ y = y + \dfrac{s}{2\lambda_2} \\ z = z + \dfrac{t}{2\lambda_3} \end{cases}$, vem $\lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + rx = 0$. Esta equação é a equação reduzida de uma quádrica sem centro.

Se em vez de λ_1, fosse $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_3 = 0$, a equação reduzida de uma quádrica sem centro seria $\lambda_1 x^2 + \lambda_3 z^2 + sy = 0$ ou $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + tz = 0$. Se dois valores próprios forem iguais a zero, a equação reduzida da quádrica sem centro é da forma $\lambda_1 x^2 + Ay + B = 0$

<u>Exemplo</u> **–** Determine a equação reduzida da quádrica representada pela equação: $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + \sqrt{3}y - \dfrac{7}{12} = 0$.

A equação da quádrica sob a forma matricial é $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \dfrac{7}{12} = 0$. Fazendo $\mathbf{X}_S = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$, a equação fica $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{X}_S + \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{X}_S - \dfrac{7}{12} = 0$.

Determinemos os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$: $\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{array}{ccc} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{array}$$

, isto é, $(3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 1 + 1 -$ $-(1(5-\lambda)1) - ((3-\lambda)(-1)(-1)) - (-1(-1)(3-\lambda)) = 0$, $(3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 2 - (5-\lambda) -$ $-(3-\lambda) - (3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 2 - 5 + \lambda - 3 + \lambda - 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)\times$ $\times(5-\lambda)(3-\lambda) - 9 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) - 3(3-\lambda) = 0$, ou seja, tem-se $(3-\lambda)[(5-\lambda)(3-\lambda) - 3] = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(15 - 5\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 3) = 0$ e assim temos

$(3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12)=0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(-\lambda^2+8\lambda-12)=0$. Determinemos as raízes da equação de 2º grau: $\lambda=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\times(-1)\times(-12)}}{-2}=\frac{-8\pm\sqrt{16}}{-2}=\frac{-8\pm 4}{-2}$, isto é, $\lambda=2 \vee \lambda=6$, logo teremos $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-6)=0$. Teremos os valores próprios $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ e $\lambda_3=6$.

Determinemos os vectores próprios unitários associados aos valores próprios: $\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Substituindo λ por 2 na matriz anterior, vem

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é: $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ -x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_1=t \\ x_2=0 \\ x_3=-t \end{cases}$. Este resultado é obtido se resolvermos o sistema em ordem a x_1, e considerando depois $x_1=t$, uma qualquer incógnita, tal como foi explicado no último capítulo.

Assim, $\mathbf{X}_{1t}=t(1,0,1)$ são vectores próprios associados a $\lambda_1=2$. Fazendo $t=1/\sqrt{2}$ - ou seja, o inverso da norma de $(1,0,1)$ - obtém-se o vector próprio unitário $\mathbf{X}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, associado a $\lambda_1=2$. Substituindo λ por 3 vem

$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é, $\begin{cases} -x_2+x_3=0 \\ -x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_1=t \\ x_2=t \\ x_3=t \end{cases}$. Assim, $\mathbf{X}_{2t}=t(1,1,1)$ são vectores próprios associados a $\lambda_2=3$. Fazendo, $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ obtém-se o vector próprio unitário $\mathbf{X}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ associado a $\lambda_2=3$. Substituindo λ por 6 vem

$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é, $\begin{cases} -3x_1-x_2+x_3=0 \\ -x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2-3x_3=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_1=t \\ x_2=-2t \\ x_3=t \end{cases}$. Assim, $\mathbf{X}_{3t}=t(1,-2,1)$ são vectores próprios associados a $\lambda_3=6$. Fazendo, $t=\frac{1}{\sqrt{6}}$ obtém-se o vector próprio unitário $\mathbf{X}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ associado a $\lambda_3=6$.

A matriz $\mathbf{A}$ é transformada na matriz $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{bmatrix}$ através da matriz ortogonal $\mathbf{P}$ cujos elementos são as componentes dos vectores próprios unitários $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ e $\mathbf{X}_3$, associados a λ_1, λ_2 e λ_3: $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\downarrow}&\overbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\downarrow}&\overbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}}^{\downarrow}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$. A equação $\mathbf{X}_S{}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}_S+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_S-\frac{7}{12}=0$ pode ser expressa, através de uma transformação ortogonal – rotação – por $\mathbf{X}_P{}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{X}_P+\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{X}_P-\frac{7}{12}=0$. Considerando $\mathbf{X}_P=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$, vem $\begin{bmatrix}x'&y'&z'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\sqrt{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}-\frac{7}{12}=0$, isto é: $2x'^2+3y'^2+6z'^2+y'-\sqrt{2}z'-\frac{7}{12}=0$ ou seja $2x'^2+3\left(y'^2+\frac{y'}{3}\right)+$ $+6\left(z'^2-\frac{\sqrt{2}}{6}z'\right)-\frac{7}{12}=0$ ou $2x'^2+3\left(y'^2+\frac{y'}{3}+\frac{1}{36}\right)+6\left(z'^2-\frac{\sqrt{2}}{6}z'+\frac{2}{9}\right)-\frac{7}{12}-$ $-\frac{1}{12}-\frac{4}{3}=0\Leftrightarrow 2x'^2+3\left(y'+\frac{1}{6}\right)^2+6\left(z'-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)-2=0$. Fazendo, através de uma translacção: $\begin{cases}x'=x'\\y'=y'+\frac{1}{6}\\z'=z'-\frac{\sqrt{2}}{3}\end{cases}$, a equação anterior fica: $2x'^2+3y'^2+6z'^2-2=0$ ou $\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{0{,}67}+\frac{z'^2}{0{,}33}=1$.

Classificação das Quádricas.

A equação de uma quádrica de centro é $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = Q$. Dependendo dos valores de λ_1, λ_2 e λ_3 e Q, a quádrica será do tipo *elipsóide* ou *hiperbolóide*. A equação de uma quádrica sem centro é: $\lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + rx = 0$ ou $\lambda_1 x^2 + \lambda_3 z^2 + sy = 0$ ou $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + tz = 0$. A quádrica representada por qualquer uma dessas equações é do tipo *parábolóide*. A quádrica representada por uma equação da forma $\lambda_1 x^2 + Ay^2 + B = 0$ é do tipo *cilindro*.

<u>Exemplo</u> – Determine o género de quádrica representada pela equação $13x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xz - 2yz + \sqrt{3}y - \dfrac{7}{12} = 0$.

Vimos que a equação reduzida desta quádrica é $2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 - 2 = 0$. Como $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 6$ temos a equação $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 - 2 = 0$ que é a equação de uma quádrica de centro.