ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Universidade Fernando Pessoa

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Capítulo I - Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

EXERCÍCIOS

1. Calcule:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ (R: $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & -4 \end{bmatrix}$)

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (R: Soma impossível)

c) $-3 * \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ (R: $\begin{bmatrix} -3 & -6 & 9 \\ -12 & 15 & -18 \end{bmatrix}$

2. Sejam

$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Calcule 3A+4B-2C. (R: $\begin{bmatrix} 10 & -25 & -5 \\ 7 & -2 & 10 \end{bmatrix}$)

3. Sejam

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

a) Calcule 4A-3B+5C. (R: $\begin{bmatrix} -7 & 54 & 99 \\ 21 & 4 & 3 \end{bmatrix}$)

b) Calcule 4C+2A-6B. (R: $\begin{bmatrix} -26 & 72 & 102 \\ 12 & -10 & 6 \end{bmatrix}$)

4. Encontre **x**, **y**, **z** e **w** tais que:

$3*\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$ (R: x=2, y=4, z=1, w=3)

5. Demonstre o seguinte teorema: “Sejam A e B matrizes do tipo m x n e k um escalar. Então: $k*(A+B) = k*A + k*B$”

6. Sejam

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

a) Determine A.B (R: $\begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$)

b) Determine B.A (R: Produto não definido)

7. Dados

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

a) Determine A.B (R: $\begin{bmatrix} 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$)

b) Determine B.A (R: Produto não definido)

8. Dados

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

a) Determine A.B (R: $\begin{bmatrix} -1 & -8 & 10 \\ 1 & -2 & 5 \\ 9 & 22 & -15 \end{bmatrix}$)

b) Determine B.A (R: $\begin{bmatrix} -15 & 19 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$)

9. Dados

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine a forma de A.B (R: (2x4))

b) Seja C=A.B. Calcule C_{23}, C_{14} e C_{21}. (R: 6,3,-11)

10. Quais as condições para que o produto de uma matriz pela sua transposta esteja definido?

11. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Determine:

a) $A.A^T$ (R: $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$)

b) $A^T.A$ (R: $\begin{bmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{bmatrix}$)

12. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$, determine:

a) $(A.B)^T$ (R: $\begin{bmatrix} -1 & 9 & -4 \\ -1 & -17 & 8 \\ -52 & -65 & 38 \end{bmatrix}$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

b) $B^T.A^T$ (R: $\begin{bmatrix} -1 & 9 & -4 \\ -1 & -17 & 8 \\ -52 & -65 & 38 \end{bmatrix}$)

13. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

a) Determine A^2 (R: $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$)

b) Determine A^3 (R: $\begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$)

c) Calcule f(A), sendo f definida como:

$f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ (R: $\begin{bmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{bmatrix}$)

d) Mostre que A é um zero do polinómio

$$g(x) = x^2 + 2x - 11$$

14. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, encontre um vector coluna não nulo $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tal que A.u=3u.

(R: p.ex. $u = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$)

15. Sejam

$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

Prove que A é inversa de B.

16. Prove que, sendo A, B, C, D e X matrizes quadradas da mesma ordem e inversíveis

$$A.D.X = A.B.C \Leftrightarrow X = D^{-1}.B.C$$

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

17. Resolva a seguinte equação matricial:

$$C.A.X^T = C$$

em que C, A e X são matrizes quadradas da mesma ordem e inversíveis.

(R:X=$(A^{-1})^T$)

18. Mostre que, sendo A e C matrizes quadradas da mesma ordem e inversíveis

$$(A.C)^{-1} = C^{-1}.A^{-1}$$

19. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Através de operações elementares transforme a matriz A na matriz identidade.

20. Determine a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. (R: $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$)

21. Determine a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$. (R: $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$)

22. Determine a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$. (R: A não tem inversa)

23. Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x - y - z = 4 \\ -2x + 2y + z = -6 \end{cases}$$

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

a) utilizando o método de Gauss

b) utilizando o método de Gauss-Jordan (R: x=5, y=3, z=-2)

24. Resolva o seguinte sistema de equações pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6 = 0 \end{cases}$$

(R: Sistema impossível)

25. Resolva o seguinte sistema de equações pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

(R: Sistema indeterminado: x=0, y=-z)

26. Resolva o seguinte sistema de equações lineares pelo método de Gauss

$$\begin{cases} w + x + y = 3 \\ -3w - 17x + y + 2z = 1 \\ 4w - 17x + 8y - 5z = 1 \\ -5x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

(R: w=2, x=0, y=1, z=3)

27. Resolva o seguinte sistema em função de **x** e **y**, utilizando o método de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 3a_1 + 5a_2 = x \\ a_1 + 2a_2 = y \end{cases}$$

(R: $a_1 = 2x - 5y,\ a_2 = 3y - x$)

28. Determine qual o valor de **t** que torna possível o sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 3z = 2 \\ x + 2z = -t \end{cases}$$

(R: t=-2)

EXERCÍCIOS DIVERSOS

29. Resolva o seguinte sistema de equações lineares pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ -3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{(R: x=1, y=1)}$$

30. Calcule a inversa da seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}, \text{ através de } \left(A \mid I \right). \qquad \left(\text{R: } \begin{pmatrix} -5/46 & 9/46 & -1/23 \\ 15/23 & -4/23 & 6/23 \\ 13/92 & -5/92 & -1/23 \end{pmatrix}\right)$$

31. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -6 \end{cases} \qquad \text{(R: } x_1=5,\ x_2=3,\ x_3=-2\text{)}$$

Resolva o sistema utilizando o método de Gauss-Jordan.

32. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ -4x - 6y = b \end{cases}$$

Através do método de Gauss, determine:

a) em que condições este sistema é possível; (R: b=-8)

b) <u>uma</u> solução deste sistema. (R: p.ex. x=1/2, y=1, z=3)

33. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 5 \\ x - 4y - z - 2t = 14 \\ -2x + 2y + z + t = -7 \\ x - 7y + z + 2t = 10 \end{cases}$$

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

a) Resolva este sistema utilizando o método de Gauss-Jordan.

(R: x=1, y=-2, z=3, t=-4)

b) Mostre que a equação matricial de um sistema **AX**=**B** é equivalente a **X**=$\mathbf{A}^{-1}$**B**.

c) Resolva o sistema acima através da expressão **X**=$\mathbf{A}^{-1}$**B**, utilizando o método da matriz adjunta para o cálculo de $\mathbf{A}^{-1}$.

34. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 - kx_2 - k^2 x_3 = k \\ kx_1 - k^2 x_2 + kx_3 = 1 \\ kx_1 + x_2 + k^3 x_3 = 1 \end{cases}$$

a) Resolva este sistema utilizando o método de Gauss.

(R: $x_1 = \dfrac{k^5 + 3k}{(k^2+1)^2}$, $x_2 = \dfrac{(k^2-1)^2}{(k^2+1)^2}$, $x_3 = \dfrac{-k^2+1}{k^3+k}$)

b) Resolva este sistema utilizando a regra de Cramer.

c) Diga em que condições este sistema é:

i) possível e determinado (R: $k \neq 0$)

ii) possível e indeterminado (R: nunca)

iii) impossível (R: k=0)

Capítulo II - Espaços Vectoriais

EXERCÍCIOS

1. Demostre que para um espaço vectorial **V**

   a) existe um único elemento nulo;

   b) existe um único elemento oposto para cada vector **v**;

   c) $\alpha \,.\, \underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{0}}, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}$;

   d) $(-\alpha).\mathbf{v} = -(\alpha.\mathbf{v}) = \alpha.(-\mathbf{v}), \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$;

   e) $\alpha \,.\, \mathbf{v} = \underline{\mathbf{0}} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \mathbf{v} = \underline{\mathbf{0}}$.

2. Mostre que $\mathbf{S} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}; \ a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$ é um sub-espaço vectorial de $\mathbf{V} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \ a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$

3. Mostre que $\mathbf{S} = \{(x, x^2), \ x \in \mathbf{R}\}$ não é sub-espaço vectorial de $\mathbf{R}^2$.

4. Sejam os vectores **u**=(1,3,4) e **v**=(2,-2,3)

   a) Mostre que **w**=(-1,13,6) é combinação linear de **u** e **v**. (R: **w**=3**u**-2**v**)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

b) Determine o valor de k para o qual o vector **p**=(1,-5,k) é combinação linear de **u** e **v**. (R: k=-1, **p**=-**u**+**v**)

c) Determine qual a condição entre x, y e z para que o vector **t**=(x,y,z) seja combinação linear de **u** e **v**. (R: 17x+5y-8z=0)

5. Mostre que os vectores **u**=(1,2,0) e **v**=(0,1,0) são geradores do sub-espaço vectorial $\mathbf{S} = \{(a,b,0),\ a,b \in \mathbf{R}\}$

6. Determine qual o sub-espaço vectorial gerado pelos vectores **u**=(2,1,0), **v**=(1,-1,2) e **w**=(0,3,-4). (R: $\mathbf{S} = \{(x,y,z) : 2x - 4y - 3z = 0,\ x,y,z \in \mathbf{R}\}$)

7. Determine se são linearmente dependentes ou independentes os seguintes vectores:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (R: L.I.)

b) **u**=t^2-2t+3 , **v**=t^2-t+4 , **w**=3t^2-8t+7 (R: L.D.)

8. Mostre que se **u**, **v** e **w** são linearmente independentes, então **u**+**v**-**w**, **u**-**w** e **u**+**v**+**w** também o são.

9. Verificar se os vectores **u**=(2,3,-5) e **v**=(1,-1,0) formam uma base do espaço vectorial $\mathbf{V} = \{(x,y,z) : x + y + z = 0,\ x,y,z \in \mathbf{R}\}$.(R: Base)

10. Para que valores de k os vectores **v**=(1,k) e **u**=(k,4) são base de $\mathbf{R}^2$? (R:k≠2 e k≠-2)

11. Construir uma base do espaço vectorial $\mathbf{M} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & a+b \\ 0 & b & c \end{bmatrix},\ a,b,c \in \mathbf{R} \right\}$

(R: p.ex: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$)

12. Mostre que, se $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ é uma base de um espaço vectorial **V**, então qualquer vector de **V** é expresso <u>univocamente</u> como combinação linear dos vectores dessa base.

EXERCÍCIOS DIVERSOS

13. Verifique, explicando convenientemente, se o conjunto X={(x,y,z): x+y+z=1} é subespaço de $\Re^3$. (R: não)

14. Verifique, explicando convenientemente, se o conjunto A={(a,b,a+b): a,b $\in \Re$} é subespaço de $\Re^3$. (R: é)

15. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) calcule $(A.B)^T$. (R: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

b) Verifique se A, B e $(A.B)^T$ são linearmente independentes. (R: são)

16. Dados os seguintes vectores de $\Re^3$: **u**=(0,1,1), **v**=(2,1,-1) e **w**=(-1,0,2), verifique se **w** é combinação linear de **u** e **v**. (R: não)

17. Considere os vectores

$$\vec{v}_1 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{v}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \vec{v}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

em que $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são os vectores da base canónica de $\Re^3$.

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

a) Mostre que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ formam uma base de $\Re^3$.

b) Escreva $\vec{u} = 4\vec{e}_1+6\vec{e}_2+3\vec{e}_3$ como combinação linear de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.

(R: $\vec{u} =-7\vec{v}_1+15\vec{v}_2+5\vec{v}_3$)

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Departamento de Ciências e Tecnologia

ANO LECTIVO 1998/99

Capítulo III - Transformações Lineares

EXERCÍCIOS

1. Verifique se são lineares as seguintes transformações:

   a) $\mathbf{T} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{T}(x, y) = (x + y, x)$ (R: sim)

   b) $\mathbf{T} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $\mathbf{T}(x, y) = xy$ (R: não)

   c) $\mathbf{T} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{T}(x, y) = (x + 2, 3x, x + y)$ (R: não)

   d) $\mathbf{T} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $\mathbf{T}(x, y, z) = x - 2y + 4z$ (R:sim)

   e) $\mathbf{T} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{M(2, 2)}$, $\mathbf{T}(x, y) = \begin{bmatrix} 2y & 3x \\ -y & x + 2y \end{bmatrix}$ (R: sim)

   f) $\mathbf{T} : \mathbf{P_1} \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{T}(ax + b) = (a + b, -1)$ (R: não)

2. Seja a transformação linear $\mathbf{T} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{T}(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$.

   a) Quais dos seguintes vectores pertencem ao núcleo de **T**?

      i) (1,-2) (R: sim)

      ii) (2,-3) (R: não)

      iii) (-3,6) (R: sim)

   b) Quais dos seguintes vectores pertencem à imagem de **T**?

      i) (2,4) (R: sim)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

ii) (-1/2,-1) (R: sim)

iii) (-1,3) (R: não)

3. Procure uma base para cada um dos núcleos das transformações seguintes:

a) $\mathbf{T}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{T}(x,y) = (x+y, x+y)$ (R: (-1,1))

b) $\mathbf{T}:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{T}(x,y,z) = (x+2y, y-z, x+2z)$ (R: (-2,1,1))

c) $\mathbf{T}:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{T}(x,y,z) = (x+y, y+z)$ (R: (1,-1,1))

d) $\mathbf{T}:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{T}(x,y,z,t) = (x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-3t)$

(R: (-2,-1,1,0) e (-3,0,1,2))

4. Determine uma transformação linear $\mathbf{T}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ cuja imagem seja gerada pelos vectores (1,2,3) e (4,5,6). (R: T(x,y)=(x+4y,2x+5y,3x+6y))

5. Seja a transformação linear $\mathbf{T}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{T}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Determine uma base para o seu núcleo e outra para a sua imagem. (R: N(T): (1,1); Im(T): (1,-2))

6. Demonstre a seguinte afirmação: "Se $\mathbf{T}:\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ é linear e $\{\mathbf{v}_1....\mathbf{v}_n\}$ geram **V**, então $\{\mathbf{T}(\mathbf{v}_1).... \mathbf{T}(\mathbf{v}_n)\}$ geram a imagem de **V**".

7. Seja $\mathbf{T}:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ a transformação linear tal que $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)$=(1,-2,1), $\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)$=(-1,0,-1), $\mathbf{T}(\mathbf{e}_3)$=(0,-1,2) e $\mathbf{T}(\mathbf{e}_4)$=(1,-3,1), sendo $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ a base canónica de $\mathbf{R}^4$.

a) Determine **T**(x,y,z,w). (R:**T**(x,y,z,w)=(x-y+w,-2x-z-3w,x-y+2z+w))

b) Determine o núcleo e a imagem de **T**.

(R: N(**T**)=$\{(3y,y,0,-2y),\ y\in\mathbf{R}$; Im(**T**)=$\mathbf{R}^3\}$

c) Determine uma base para o núcleo e outra para a imagem de **T**.

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

8. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz associada a uma transformação linear **T**, calcule:

a) **T**(3,5) (R: (21,2))

b) **T**(7,-1)(R: (11,-8))

c) **T**(-1,0)(R: (-2,1))

9. Determine a matriz associada à transformação linear $\mathbf{T}:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuja imagem é gerada pelos vectores (1,-1,2) e (3,0,1). (R: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$)

10. Determine uma base para o núcleo e outra para a imagem da transformação linear cuja matriz associada é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

(R: N(**T**): (-2,1,5/2,0); Im(**T**): (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))

11. Seja a transformação linear $\mathbf{T}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ cuja matriz associada é $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Determine **T**(x,y). (R: **T**(x,y)=(-4x+6y,-7x+9y))

b) Determine as coordenadas de **T**(1,-1) e **T**(0,-2) na base B={(1,-1),(0,-2)}.

(R: (-10,13) e (-12,14))

c) Determine a matriz associada à transformação **T** relativamente à base B.

(R: $A_B = \begin{bmatrix} -10 & -12 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$)

12. Determine a matriz associada à transformação linear

$\mathbf{T}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{T}(x,y) = (x+2y, x-y)$ (R: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

13. Dada a transformação linear $\mathbf{T}:\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\mathbf{T}(x,y,z) = (x - y + 2z, 2x + z, 3x - y - z)$,

determine a sua matriz na base B={(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)}. (R: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$)

14. A matriz $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ é a matriz associada à transformação $\mathbf{T}:\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$

relativamente à base B={(1,1),(3,2)}. Determine:

a) **T**(1,1) e **T**(3,2) na base B. (R: (2,-1),(1,-3))

b) **T**(1,1) e **T**(3,2) na base canónica. (R: (-1,0),(-8,-5))

15. Considere a seguinte base de $\mathbf{R}^3$: B={b_1=(1,1,1), b_2=(1,1,0), b_3=(1,0,0)}.

a) Determine a matriz mudança da base canónica para a base B.

(R: $M_B^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$)

b) Determine a matriz mudança da base B para a base canónica.

(R: $M_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

c) Determine as coordenadas na base B do vector **v**=(1,3,2). (R: (2,1,-2))

16. Sabendo que $M_B^A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$ e que B={(3,5),(1,2)}, determine a base A.

(R: A={(1,3),(1,-2)}.

17. Considere as seguintes bases de $\mathbf{R}^2$:

B={b_1=(1,3), b_2=(2,5)} e C={e_1=(1,0), e_2=(0,1)}.

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

a) Determine a matriz mudança da base C para a base B. (R: $M_B^C = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$)

b) Determine a matriz mudança da base B para a base C. (R: $M_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$)

c) Seja a transformação linear $\mathbf{T} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\mathbf{T}(x, y) = (2y, 3x - y)$. Mostre que

$$A_B = \left(M_C^B\right)^{-1} . A_c . M_C^B$$

sendo A_B e A_C a matriz associada à transformação **T** nas bases B e C, respectivamente.

EXERCÍCIOS DIVERSOS

18. Considere a transformação T, que tem como matriz associada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Determine a fórmula geral de T. (R: T(x,y,z)=(2x+y+z,-y-z)

b) Verifique se T é linear. (R: é)

c) Determine uma base para o núcleo de T. (R: p.ex. (0,-1,1))

19. Considere as seguintes bases de $\Re^3$:

$$A = \{(-1,1,0); \quad (1,0,1); \quad (1,1,0)\}$$

$$C = \{(1,0,0); \quad (0,1,0); \quad (0,0,1)\}$$

Determine a matriz mudança da base C para a base A.

(R: $M_A^C = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$)

20. Considere a transformação T: $M_{2x2} \to M_{2x2}$,

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+w & -y \\ -z & x+w \end{bmatrix}$$

a) Verifique se T é linear. (R: é)

b) Determine uma base para o núcleo de T. (R: p.ex. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$)

c) Determine as coordenadas de $T(a_1)$, $T(a_2)$ e $T(a_3)$ na base $A = \left\{ a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ a_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(R: (2,0,0), (0,-1,0), (0,0,-1))

d) Determine a matriz associada a T na base A. (R: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$)

21. Considere a seguinte transformação: $\mathbf{T}: \Re \to \Re$, definida por **T**(x)=f(x), $\forall x \in \Re$. Sabendo que **T** é uma transformação linear, prove que também é linear a transformação $\mathbf{G}: \Re \to \Re$, definida por **G**(x)=f'(x), $\forall x \in \Re$, em que f'(x) representa a derivada de f(x).

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Universidade Fernando Pessoa

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Capítulo IV - Determinantes

EXERCÍCIOS

1. Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ (R:-7)

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ (R: -14)

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 8 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ (R: -4)

d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ Não aplique a regra de Sarrus. (R: 0)

e) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (R: -45)

f) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{vmatrix}$ (R: 2xyz)

2. Utilizando apenas as propriedades dos determinantes calcule:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ (R: 0)

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ 0 & 2 & 2 & .... & 2 \\ 0 & 0 & 3 & .... & 3 \\ & & .... & & \\ 0 & 0 & 0 & .... & n \end{vmatrix}$ (R: n!)

c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ (R: 36)

3. Utilizando apenas as propriedades dos determinantes, verifique que:

a) Det A = $\begin{vmatrix} a & 1 & 3a+2 \\ b & 2 & 3b+4 \\ c & 3 & 3c+6 \end{vmatrix}$ = 0.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ = 0.

c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 4 & 8 & -8 \\ 16 & -10 & 2 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 24.

4. Resolver as seguintes equações:

a) $\begin{vmatrix} 2 & x & 2 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ = -3 (R: $x=5 \vee x=3$)

b) $$\begin{vmatrix} x+3 & x+1 & x+4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 9 & 10 & 7 \end{vmatrix} = -7$$ (R: x=1)

c) $$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$ (R: $x=-3 \vee x=1$)

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$ (R: $x=a \vee x=b \vee x=c$)

5. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares através da regra de Cramer:

a) $$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 3x+5y=1 \end{cases}$$ (R: x=2, y=-1)

b) $$\begin{cases} 2x+3y=z+1 \\ 3x+2z=8-5y \\ 3z-1=x-2y \end{cases}$$ (R: x=3, y=-1, z=2)

c) $$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+2x_4=1 \\ -x_1+x_2+x_3-3x_4=2 \\ 3x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_2+x_3-x_4=-1 \end{cases}$$ (R: $x_1=-1/3$, $x_2=-5/3$, $x_3=-2/3$, $x_4=-4/3$)

6. Resolva o seguinte sistema de equações pela regra de Cramer e determine o valor de λ para o qual este sistema é possível.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=2 \\ 2x-2y+3z=3 \end{cases}$$ (R: $x=-5/(\lambda-1)$, $y=1/(\lambda-1)$, $z=(\lambda+3)/(\lambda-1)$, $\lambda\neq1$)

7. Calcule, usando determinantes, a inversa da matriz

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5/4 & -1/2 & 3/4 \end{bmatrix} \right)$$

8. Encontre os valores próprios e os vectores próprios das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (R: λ_1=4, λ_2=-1, E(4)={ x(2/3,1)}, E(-1)={ x(1,-1)})

b) $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (R: λ_1=10, λ_2=5, E(10)={ x(1,1)}, E(5)={ x(1,-4)})

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (R: λ_1=2, λ_2=3, E(2)={ x(1,0,0)}, E(3)={ x(-1,1,2)})

9. Diagonalize as seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (R: $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$)

b) $A = \begin{bmatrix} 7.3 & 0.2 & -3.7 \\ -11.5 & 1.0 & 5.5 \\ 17.7 & 1.8 & -9.3 \end{bmatrix}$ (R: $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$)

EXERCÍCIOS DIVERSOS

10. Calcule o seguinte determinante, sem utilizar a regra de Sarrus para o cálculo dos determinantes de 3ª ordem

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & 28 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(R: 66)}$$

11. Resolva a seguinte equação, sem utilizar a regra de Sarrus para calcular os determinantes de 3ª ordem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3x & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(R: } x=1 \vee x=2/3\text{)}$$

12. Resolva o seguinte sistema de equações lineares através da regra de Cramer:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_4 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_4 \end{cases}$$

13. Encontre os valores próprios e os vectores próprios da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \qquad \text{(R: } \lambda=a,\ \lambda=b,\ \lambda=c,\ E(a)=x(1,0,0),\ E(b)=y(0,1,0),\ E(c)=z(0,0,1)\text{)}$$

14. Considere as matrizes reais: $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $G = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Utilizando unicamente as propriedades dos determinantes no cálculo destes, calcule o determinante do produto das matrizes F e G e verifique que é igual ao produto dos determinantes dessas matrizes. (R: 828)

15. Considere a seguinte matriz real: $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Sendo E^{-1} calculada através da matriz adjunta, calcule det E^{-1}, e verifique que é igual a (det E)$^{-1}$, calculando os determinantes unicamente através da aplicação das suas propriedades. (R: 1/5)

16. Sabendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcule $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3x & 3y & 2 \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix}$, enunciando os princípios em que se baseou. (R: -3)

17. Calcule o seguinte determinante sem utilizar a regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} c+b & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

(R: $c^4a-ca^4-c^4b+a^4b-ab^4+cb^4$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Departamento de Ciências e Tecnologia

ANO LECTIVO 1998/99

Capítulo V - Espaços Euclideanos

EXERCÍCIOS

1. Calcule o módulo dos seguintes vectores, relativamente ao produto interno usual.

a) v=(1,2) (R: $\sqrt{5}$)

b) v=(4,5,8) (R: $\sqrt{105}$)

c) v=(5,7,1,3) (R: $2\sqrt{21}$)

d) v=(-5/4,3/4) (R: $\sqrt{34}/4$)

2. Considere o produto interno usual em $\Re^3$. Sendo $v_1=(1,2,-3)$, $v_2=(3,-1,-1)$, $v_3=(2,-2,0)$, determine o vector $u\in\Re^3$ tal que $u.v_1=4$, $u.v_2=6$, $u.v_3=2$. (R: u=(3,2,1))

3. Considere o produto interno usual em $\Re^3$. Determine **c** de modo que

$$v=(6,-3,c),\ |v|=7 \qquad (R: c=\pm 2)$$

4. Considere o seguinte produto interno em $\Re^2$:

$$v_1=(x_1,y_1),\quad v_2=(x_2,y_2),\quad v_1.v_2=3\,x_1\,x_2+y_1\,y_2$$

Relativamente a este produto interno, determine v=(x,y) tal que

$|v|=4$ e $u.v=10$, sendo u=(1,-2) (R:v=(2,-2) ou v=(6/7,-26/7))

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

5. Relativamente ao produto interno usual, determine o ângulo entre os seguintes pares de vectores:

a) v=(1,2) e u=(1,3) (R: θ=arc cos 7/$\sqrt{50}$)

b) v=(4,5,8) e u=(5,3,1) (R: θ=arc cos 43/$\sqrt{3675}$)

c) v=(5,7,1,3) e u=(1,2,1,2) (R: θ=arc cos 26/$\sqrt{840}$)

d) v=(-5/4,3/4) e u=(0,1)(R: θ=arc cos 3/$\sqrt{34}$)

6. Sendo u=$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e v=$\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ duas matrizes de $\mathbf{M}_{(2x2)}$, considere o seguinte produto interno: u**.**v=$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2$. Sendo w=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e t=$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) |w+t| (R: $\sqrt{21}$)

b) o ângulo entre w e t (R: θ=arc cos 4/$\sqrt{42}$)

7. Considere o seguinte produto interno em $\mathbf{P}_2$:

$$p = a_2x^2 + a_1x + a_0 \,,\quad q = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$$p \cdot q = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$$

Dados $p_1 = x^2 - 2x + 3,\ p_2 = 3x - 4,\ p_3 = 1 - x^2$, calcule:

a) $p_1 . p_2$ (R: -18)

b) $|p_1|$ e $|p_3|$ (R: $\sqrt{14}$ e $\sqrt{2}$)

c) $|p_1+p_2|$ (R: $\sqrt{3}$)

d) $\dfrac{p_2}{|p_2|}$ (R: 3/5x-4/5)

e) o ângulo entre p_2 e p_3 (R: θ=arc cos$(-\dfrac{4}{5\sqrt{2}}$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

8. Sejam os vectores u e v pertencentes ao espaço vectorial euclideano V. Determine o cosseno do ângulo entre u e v, sabendo que:

$$|u|=3\ ,\ |v|=7\ \text{ e }\ |u+v|=4\sqrt{5} \qquad \text{(R: 11/21)}$$

9. Considere no $\Re^3$ o produto interno usual. Para que valores de m os seguintes vectores u e v são ortogonais?

a) u=(3m,2,-m) , v=(-4,1,5) (R: m=2/17)

b) u=(0,m-1,4) , v=(5,m-1,-1) (R: m=3 ou m=-1)

10. Considere o seguinte produto interno em $\Re^3$:

$$(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2) = 2x_1x_2 + y_1y_2 + 4z_1z_2$$

Determine, em relação a esse produto interno, um vector unitário simultâneamente ortogonal aos vectores u=(1,-1,2) e v=(2,1,0). (R: p.ex. (2/9,-8/9,-1/6))

11. Considere o seguinte produto interno em $\mathbf{M}_{(2x2)}$:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$$

Determine x de modo que u=$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & x \end{bmatrix}$ e v=$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ sejam ortogonais. (R: x=4)

12. O conjunto B=$\{(1,-1)\ ,\ (2,b)\}$ é uma base ortogonal de $\Re^2$ em relação ao produto interno $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = 2x_1x_2 + y_1y_2$. Calcule **b** e determine uma base ortonormal a partir de B. (R: b=4; B'=$\{(1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})\ ,\ (1/\sqrt{6},2/\sqrt{6})\}$)

13. Determine uma base ortonormal relativamente ao produto interno usual para o sub-espaço de $\Re^3$ que é gerado pelos vectores $\mathbf{v_1}$=(2,2,1) e $\mathbf{v_2}$=(1,-1,3).

(R: B'=$\{(2/3,2/3,1/3)\ ,\ (1/3\sqrt{10},-5/3\sqrt{10},8/3\sqrt{10})\}$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

14. Determinar uma base ortonormal relativamente so produto interno usual para o sub-espaço de $\Re^4$ que é gerado pelos vectores $\mathbf{v_1}$=(1,1,0,1), $\mathbf{v_2}$=(1,1,0,0) e $\mathbf{v_3}$=(1,-1,1,-1).

(R: B'=$\{$(1/$\sqrt{3}$,1/$\sqrt{3}$,0,1/$\sqrt{3}$) , (1/$\sqrt{6}$,1/$\sqrt{6}$,0,-2/$\sqrt{6}$) , (1/$\sqrt{3}$,-1/$\sqrt{3}$,1/$\sqrt{3}$,0)$\}$)

15. Considere o seguinte produto interno em $\Re^2$:

$$(a,b).(c,d)=4ac-ad-bc+2bd$$

Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal a partir de B=$\{$(2,2) , (-3,7)$\}$. (R: B'=$\{$(1/2,1/2) , (-1/2$\sqrt{7}$,3/2$\sqrt{7}$)$\}$

16. Reduza a seguinte forma quadrática no plano

$$p(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$$

à forma canónica $p'(x) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$ (R: $p'(x) = (-1)x_1'^2 + 3x_2'^2$)

EXERCÍCIOS DIVERSOS

17. Considere o seguinte conjunto de vectores: $\{(1,2,1);(1,1,1);(1,0,-2)\}$

a) Prove que os vectores constituem uma base de $\Re^3$.

b) Encontre uma base ortonormal a partir da base anterior, relativamente ao seguinte produto interno:

$$(x_1,y_1,z_1).(x_2,y_2,z_2) = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 + z_1z_2$$

(R: B''= $\{(1/\sqrt{15},2/\sqrt{15},1/\sqrt{15}),(2/\sqrt{15},-1/\sqrt{15},2/\sqrt{15}),(1/\sqrt{6},0,-2/\sqrt{6})\}$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

18. Dado um espaço vectorial E e uma base *S*= $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, deduza as fórmulas que lhe permitem obter a base ortogonal *S'*= $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ a partir de *S*.

19. Considere a seguinte transformação

$$T:\ \Re^3 \to \Re^3\ ,\ T(\vec{u}) = \vec{m}(\vec{u} \cdot \vec{n})$$

sendo $\vec{m} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ e $\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$.

Mostre que T é linear.

a) Determine a sua matriz associada. (R: $A = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Universidade Fernando Pessoa

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Capítulo VI - Geometria Analítica no Plano

EXERCÍCIOS

1. Determine as equações vectorial, paramétricas e cartesiana da recta *r* que passa pelo ponto A e tem a direcção de $\vec{\mathbf{v}}$, sendo:

   a) A=(2,-3) e $\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}$ (R: Eq.cartesiana: y+3=1/2(x-2))

   b) A=(3,-1) e $\vec{\mathbf{v}} = -3\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}}$ (R: Eq.cartesiana: y+1=2/3(x-3))

   c) A=(2,-3) e $\vec{\mathbf{v}} = 3\vec{\mathbf{i}}$ (R: Eq.paramétricas: $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 \end{cases}$)

2. Determine as equações vectorial, paramétricas e cartesiana da recta *r* que passa pelo ponto A e B, sendo:

   a) A=(5,8) e B=(9,6) (R:Eq.cartesiana: y-8=-1/2(x-5))

   b) A=(1,0) e B=(-1,-1) (R: Eq.cartesiana: y=8/3(x-1))

   c) A=(0,0) e B=(-1,-1) (R: Eq.cartesiana: y=x)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

3.

a) Mostre que a recta *r* que passa pelo ponto A=(x_1,y_1) e tem a direcção do vector $\vec{\mathbf{v}} = a\vec{\mathbf{i}} + b\vec{\mathbf{j}}$ se pode descrever pela <u>equação simétrica da recta</u>: $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$.

b) Determine a equação simétrica da recta que passa pelo ponto A=(2,-3) e tem a direcção do vector $\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}$. (R: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1}$)

4. Calcule o ângulo formado pelas rectas *r* e *s*, sendo:

a) r: $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-2}$ e s: $\frac{x}{2} = \frac{y+5}{-1}$ (R: 0º)

b) r: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \end{cases}$ e s: $\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ (R: arccos($\sqrt{10}/10$))

c) r: $\frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{5}$ e s: eixo dos yy (R: arccos($\sqrt{5}/5$))

5.

a) Verifique que a recta *r* que passa pelos pontos A_1=(1,2) e B_1=(4,6) é paralela à recta *s* que passa pelos pontos A_2=(5,7) e B_2=(11,15).

b) A recta *r* passa pelo ponto A=(1,-2) e é paralela à recta *s*: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \end{cases}$.

Determine <u>k</u> de modo a que o ponto P=(0,k) pertença à recta *r*. (R: k=1)

6.

a) Verifique que a recta *r*: $\frac{x-4}{4} = \frac{y-8}{-6}$ é ortogonal à recta *s*: $\frac{x+2}{3} = \frac{y+6}{2}$.

b) Calcule <u>m</u> de modo a que a recta *r*: $\begin{cases} x = 3 + mt \\ y = 1 + t \end{cases}$ seja ortogonal à recta *s* que passa pelos pontos A=(3,m) e B=(m,3). (R: m=3 $\vee$ m=1)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

7. Calcule a distância entre os pontos A=(5,2) e B=(7,1). (R: $\sqrt{5}$)

8. Calcule a distância do ponto w=(2,3) à recta de equação $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}$. (R: $3/\sqrt{13}$)

9. Determine a equação reduzida e o género da cónica representada pela equação $11x^2-24xy+4y^2+20x-40y-20=0$ (R: $X^2-4Y^2=-4$, hipérbole)

10. Determine a equação reduzida e o género da cónica representada pela equação $2x^2+2xy+2y^2+7\sqrt{2}x+5\sqrt{2}y+10=0$ (R: $X^2+3Y^2=3$, elipse)

11. Determine a equação reduzida e o género da cónica representada pela equação $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$ (R: $Y^2-4\sqrt{2}X=0$, parábola)

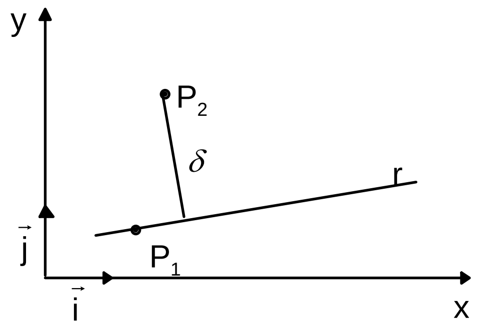
12. Determine a equação reduzida e o género da cónica representada pela equação $4x^2+24xy-3y^2-156=0$ (R: $-12X^2+13Y^2=156$, hipérbole)

13. Determine a equação reduzida e o género da cónica representada pela equação $x_1^{\,2}+6x_1x_2+9x_2^{\,2}=0$ (R: $10X_2^{\,2}=0$, parábola)

14. Determine a equação reduzida e o género da cónica representada pela equação $3x^2-2xy+3y^2-2x-10y-1=0$ (R: $X^2+2Y^2=6$, elipse)

EXERCÍCIOS DIVERSOS

15. Deduza a distância δ entre um ponto P_2 de coordenadas (x_2, y_2) e uma recta r, expressa pela equação $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b}$, tal que



n

16. Determine a equação reduzida da cónica

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0\ .$$

17. Determine a equação reduzida e o género da cónica

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y - 1 = 0$$ (R: $2X^2+4Y^2-12=0$, elipse)

18. Determine a equação reduzida e o género da cónica

$$7x^2 - 8xy + y^2 - 17\sqrt{5}\,x + 11\sqrt{5}\,y + 41 = 0$$ (R: $-X^2+9Y^2-9=0$, hipérbole)

19. Considere a seguinte cónica:

$$x^2 + y^2 + xy + 5\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 1 = 0$$

a) Determine a sua equação reduzida e classifique a cónica.

(R: $1/2X^2+3/2Y^2-13=0$, elipse)

b) Prove que a base formada pelos vectores próprios unitários da matriz A é ortogonal.

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

Capítulo VII - Geometria Analítica no Espaço

EXERCÍCIOS

1. Determine as equações vectorial, paramétricas e cartesianas da recta *r* que passa pelo ponto A=(3,5,-4) e tem a direcção de $\vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}$.

(R: Eq.cartesianas: $\begin{cases} y = 11 - 2x \\ z = 5 - 3x \end{cases}$)

2. Determine as equações vectorial, paramétricas e cartesianas da recta *r* que passa pelos pontos A=(2,-1,7) e B=(1,-1,1). (R: Eq.cartesianas: $\begin{cases} y = -1 \\ z = -5 + 6x \end{cases}$)

3. Determine a equação simétrica da recta que passa pelo ponto A=(3,5,4) e tem a direcção do vector $\vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}$. (R: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{3}$)

4. Determine as equações paramétricas e a equação geral do plano π que passa pelo ponto A=(-3,-2,1) e é paralelo aos vectores $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$ e $\vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}$.

(R: Eq. geral: -6x-y+4z-24=0)

5. Determine as equações paramétricas e a equação geral do plano π que passa pelos pontos A=(-3,-2,1), B=(2,1,-1) e C=(5,3,-1). (R: Eq. geral: -5z-5=0)

6. Verifique se são paralelos os planos:

π_1: 2x-6y+9z-10=0

π_2: x-7y+10z-1=0 (R: não)

7. Verifique se são perpendiculares os planos:

π_1: x-2y+3z-7=0

π_2: x-2y+5z-14=0 (R: não)

8. Considere a recta *r*: $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 9x + 6 \end{cases}$ e o plano π: x-4y+6z-12=0.

a) Verifique se são paralelos. (R: não)

b) Verifique se são perpendiculares. (R: não)

9. Determine as equações cartesianas da recta *r* que é a intersepção dos planos

π_1: 7x-4y+3z-14=0

π_2: x-10y+7z+10=0 (R: $\begin{cases} y = -23x + 64 \\ z = -33x + 90 \end{cases}$)

10. Dado o plano π_1 que passa pelo ponto A=(2,1,3) e é paralelo aos vectores $\vec{\mathbf{u}} = -3\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$ e $\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}}$, determine:

a) A equação geral do plano. (R: 5x-4y+3z-15=0)

b) As equações paramétricas do plano. (R: $\begin{cases} x = 2 - 3h + 2t \\ y = 1 - 3h + t \\ z = 3 + h - 2t \end{cases}$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

c) A equação simétrica da recta r que é a intersepção do plano π_1 com o plano

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 2 - 2h + 3t \\ y = 4 + h + 2t \\ z = -5 + t \end{cases} \qquad \left(\text{R: } \frac{x}{1} = \frac{11y - 120}{19} = \frac{11z - 105}{7} \right)$$

11. Calcule a distância entre os pontos A=(6,5,-4) e B=(1,2,-14). (R: $\sqrt{134}$)

12. Calcule a distância do ponto W=(7,2,-1) à recta de equação $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{3}$.

(R: $3\sqrt{6}$)

13. Calcule a distância entre as rectas r e s:

$$r: \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{2} \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad (\text{R: } \sqrt{30}/6)$$

14. Calcule a distâncias do ponto P=(7,-1,2) ao plano x+4y-3z+10=0. (R: $7/\sqrt{26}$)

15. Determine a equação reduzida e o género da quádrica representada pela equação

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$$

(R: $-X_1{}^2 - X_2{}^2 + 5X_3{}^2 = 0$, quádrica de centro)

16. Determine a equação reduzida e o género da quádrica representada pela equação

$$11x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 16xy + 4xz - 20yz + 2x + 2y + 2z + 1 = 0$$

(R: $-9X^2 + 9Y^2 + 18Z^2 = -17/18$, quádrica de centro)

17. Determine a equação reduzida e o género da quádrica representada pela equação

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 10x + 20z - 3 = 0$$

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

(R: $5X^2 + 5Y^2 + 5Z^2 = 28$, quádrica de centro)

18. Determine a equação reduzida e o género da quádrica representada pela equação

$$y^2 - 4xz - 4x + 2y - 3 = 0$$

(R: $-2X^2 + Y^2 + 2Z^2 = 4$, quádrica de centro)

19. Determine a equação reduzida e o género da quádrica representada pela equação

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz - 10x - 6y - 2z - 7 = 0$$

(R: $3Y^2 + 6Z^2 - 16/\sqrt{2}X = 8$, parabolóide)

20. Determine a equação reduzida e classifique a seguinte quádrica:

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 4x + 6y - 2z + 2 = 0$$

(R: $2X^2+3Y^2+6Z^2-1/2=0$, quádrica de centro)

21. Determine a equação reduzida e classifique a seguinte quádrica:

$$4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + 12x_1 - 6x_3 = 3$$

(R: $12/\sqrt{5}X_1 - 24/\sqrt{5}X_2 + 6X_3^2 = 21/4$, cilindro)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca