



**Universidade Fernando Pessoa**  
**Departamento de Ciência e Tecnologia**  
**Exame de Época Recurso      2000/07/06**  
**Análise Matemática II      2º Semestre**

Cursos de Engenharia do Ambiente, Comunicação, Civil, Qualidade e Arquitectura e Urbanismo

**Duração: 2 h**  
**Tolerância: 30 min**

**Nota:** Apresente todos os cálculos que efectuar, justificando devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular. Não pode escrever a lápis. Este exame está dividido em três grupos numerados de I a III. Responda a cada um destes grupos em folhas de exame diferentes.

### *Grupo I*

1. A área de um triângulo é dada por  $K = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$ . Para  $a = 20$ ,  $b = 30$  e  $C = 30^\circ$ , encontre:
  - a) A taxa de variação de  $K$  em relação a  $a$ . (0,5 valores)
  - b) A taxa de variação de  $K$  em relação a  $b$ . (0,5 valores)
  - c) A taxa de variação de  $b$  em relação a  $a$ . (0,5 valores)
  
2. Encontre as derivadas parciais de 1ª ordem de  $z$  em relação às variáveis independentes  $x$  e  $y$  para  $x^2(2y + 3z) + y^2(3x - 4z) + z^2(x - 2y) = xyz$ .  
(1,5 valores)
  
3. O potencial eléctrico  $V$  num ponto  $(x, y)$  é dado por  $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ .  
Encontre a taxa de variação de  $V$  no ponto  $(3, 4)$  na direcção do ponto  $(2, 6)$ .  
(1,5 valores)



## Grupo II

4. Sabendo que  $V$  é o sólido limitado pelas funções  $z = 2 - x^2 - y^2$  e  $z = x^2 + y^2$ ,

a) Represente graficamente  $V$ . Faça-o por partes e pormenorizadamente.

(2 valores)

b) Utilize um integral duplo para calcular o volume de  $V$ .

(2 valores)

c) Utilize um integral triplo para calcular o volume de  $V$ , em coordenadas cilíndricas e em coordenadas rectangulares ou cartesianas. Concretize o cálculo apenas para este último integral.

(3,5 valores)

Sugestão: Utilize a mudança de variável  $x = \text{sent}$ .

5. Seja  $m(x, y) = 3x^4y - 7x^3y - x^2 + y + 1$ . Encontre as equações, no ponto  $(1, 2, -6)$ ,

a) Do plano tangente. (1 valor)

b) Da recta normal para a superfície dada no ponto indicado. (1 valor)

## Grupo III

6. Calcule o trabalho realizado por  $\vec{F}$  ao longo de  $C$  quando

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{e}_1 + (z + x)\vec{e}_2 + (x + y)\vec{e}_3 \text{ e } C \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases} \quad (3 \text{ valores})$$

7. Determine a massa da calote esférica pertencente a  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , situada acima de  $z = \frac{a}{2}$ , sabendo que a densidade  $\sigma$  é directamente proporcional à distância do ponto à origem, tal que  $\sigma = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . (3 valores)

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

**Formulário:**  $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

