



Universidade Fernando Pessoa
Departamento de Ciência e Tecnologia
Exame de Época Especial Trabalhador-Estudante **2000/09/07**
Análise Matemática II **2º Semestre**

Cursos de Engenharia do Ambiente, Comunicação, Civil, Qualidade e Arquitectura e Urbanismo

Duração: 2 h
Tolerância: 30 min

Nota: Apresente *todos* os cálculos que efectuar, *justificando* devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular. Não pode escrever a lápis.

I

1. (2 valores) Deduza, em coordenadas cilíndricas, a fórmula do comprimento de arco de uma curva cujo vector posição é \vec{R} .

II

2. (4 valores) Considere a função $z = z(x, y)$ definida implicitamente pela equação $\varphi(x^2 + y^2 - z^2, e^z) + \psi(z^2 + x) = 0$ onde φ e ψ são diferenciáveis em ordem aos seus argumentos. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em função de x, y e z e das derivadas parciais $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial w}$, fazendo $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = e^z$ e $w = z^2 + x$.

3. (2 valores) O caudal Q no plano (x, y) é dado por $Q = \log_e \sqrt{x^2 + y^2}$. Determine a taxa de variação de Q em $(1, 1)$ segundo a direcção do vector unitário $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$.

III

4. Seja $F(x, y) = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + \vec{k}$.



- a) **(1,5 valores)** Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$, sendo $\vec{R} = t\vec{i} + e^t\vec{j} + \cos t\vec{k}$ entre $0 \leq t \leq \pi$.
- b) **(1,5 valores)** Prove que o integral da alínea anterior é independente do percurso de integração e calcule o seu valor através do teorema fundamental dos integrais de linha.

IV

5. Considere o sólido limitado inferiormente pelo plano $z = 1$, superiormente pela superfície $z = xy^2 + 2$, e lateralmente pelo cilindro definido por $y = 0$, $y = 2 - x$ e $y = x^2$.
- a) **(2 valores)** Calcule o volume deste sólido através de um integral triplo.
- b) **(1 valor)** Troque a ordem de integração relativamente às variáveis x e y . Não é necessário resolver o novo integral.
- c) **(1 valor)** Calcule o volume do sólido através de um integral duplo.
6. **(3 valores)** Calcule e represente o valor da região \mathfrak{R}^3 limitada por $z \geq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \geq 4$ e $z \leq 8$.

V

7. **(2 valores)** Seja σ a parte superior do hemisfério dada por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ orientada por um vector normal cujo sentido é concordante com o do eixo dos z . Determine o fluxo Φ do campo $\vec{F}(x, y, z) = z^2\vec{k}$.

