Universidade Fernando Pessoa
Departamento de Ciência e Tecnologia
Exame da Época Especial para Finalistas
Análise Matemática II
1998/12/14

Curso de **Engenharia das Construções Civis**

Duração: 2 h
Tolerância: 30 min

Nota: Apresente todos os cálculos que efectuar, justificando devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular.

1. Seja $\mathbf{R} = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$. Determine $\mathbf{V}$, $|\mathbf{V}|$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{V}\times\mathbf{A}$, k e $\mathbf{N}$.

(2.5 valores)

2. Quando duas Resistências que têm resistências R_1 ohms e R_2 ohms estão ligadas em paralelo, a sua resistência R combinada em ohms é $R = R_1 R_2/(R_1 + R_2)$. Mostre que $\dfrac{\partial^2 R}{\partial R_1^{\,2}}\dfrac{\partial^2 R}{\partial R_2^{\,2}} = \dfrac{4R^2}{(R_1+R_2)^4}$. Indique todos os passos que efectua.

(3 valores)

3. Encontre a equação do plano tangente ao elipsóide $\frac{3}{4}x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ no ponto $P_0 = \left(2,1,\sqrt{6}\right)$.

(1.5 valores)

4. Demonstre o seguinte Teorema:

Um integral de linha $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ *com funções contínuas* $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ *num domínio* D *no espaço é independente do percurso em* D *se e somente se* $\mathbf{F}$ *for o gradiente de alguma função* f *em* D, $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$, *com as componentes* $\mathbf{F}_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\mathbf{F}_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\mathbf{F}_3 = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

(1.5 valores)

5. Calcule o integral duplo da função $f(x, y) = 1 + x + y$ sobre o domínio limitado pelas curvas $y = -x$, $y > x^2$, $y = 2$ e $z = 0$. Inverta os limites, não necessitando de calcular o novo integral.

(3.5 valores)

6. Utilize um integral triplo para calcular o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

(4.5 valores)

7. Seja σ a parte do cilindro $z^2 = 1 - x^2$ entre os planos $y = 1$ e $y = -2$, orientada segundo vectores normais unitários. Determine o fluxo Φ do campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

(3.5 valores)

Formulário:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

Prof: Ana Fonseca