Universidade Fernando Pessoa
Departamento de **Ciências e Tecnologia**

Análise Matemática II

Exame de Recurso **1997/09/15**

Cursos: Engenharia do Ambiente
Engenharia da Comunicação
Engenharia das Construções Civis
Engenharia da Qualidade

Duração: 2 horas
Tolerância: 30 min.

Este exame está dividido em cinco grupos numerados de **I** a **V**.

Responda a cada um destes grupos em folhas de exercício diferentes.

Justifique convenientemente as suas respostas

Apresente todos os cálculos que efectuar.

I

1. Deduza, em coordenadas cilíndricas, a fórmula do comprimento de arco de uma curva cujo vector posição é $\vec{R}$.

II

2. Considere a função $z = z(x, y)$ definida implicitamente pela equação $\varphi(x^2 + y^2 - z^2, e^z) + \psi(z^2 + x) = 0$ onde φ e ψ são diferenciáveis em ordem aos seus argumentos. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em função de x, y e z e das derivadas parciais $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ e $\dfrac{\partial \psi}{\partial w}$, fazendo $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = e^z$ e $w = z^2 + x$.

3. O caudal Q no plano (x, y) é dado por $Q = \log_e \sqrt{x^2 + y^2}$. Determine a taxa de variação de Q em $(1, 1)$ segundo a direcção do vector unitário $\vec{u} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.

III

4. Seja $F(x, y) = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + \vec{k}$.

   a) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$, sendo $\vec{R} = t\,\vec{i} + e^t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$ entre $0 \le t \le \pi$.

   b) Prove que o integral da alínea anterior é independente do percurso de integração e calcule o seu valor através do teorema fundamental dos integrais de linha.

IV

5. Considere o sólido limitado inferiormente pelo plano $z = 1$, superiormente pela superfície $z = xy^2 + 2$, e lateralmente pelo cilindro definido por $y = 0$, $y = 2 - x$ e $y = x^2$.

   a) Calcule o volume deste sólido através de um integral triplo.

   b) Troque a ordem de integração relativamente às variáveis *x* e *y*. Não é necessário resolver o novo integral.

   c) Calcule o volume do sólido através de um integral duplo.

6. Calcule e represente o valor da região $\Re^3$ limitada por $z \ge x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \ge 4$ e $z \le 8$.

V

7. Seja σ a parte superior do hemisfério dada por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ orientada por um vector normal cujo sentido é concordante com o do eixo dos zz. Determine o fluxo Φ do campo $\vec{F}(x, y, z) = z^2 \vec{k}$.

Prof: Ana Fonseca

Alzira Dinis

Paulo Cardantas