Universidade Fernando Pessoa

Departamento de Ciência e Tecnologia

Exame **1998/06/22**

Análise Matemática II

Curso de **Engenharia do Ambiente** — **2º** Semestre

Curso de **Engenharia da Comunicação**

Curso de **Engenharia Civil**

Curso de **Engenharia da Qualidade**

Duração: 2 h

Tolerância: 30 min

Nota: Apresente <u>todos</u> os cálculos que efectuar, <u>justificando</u> devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular. Não pode escrever a lápis.

1. Recorrendo ao conceito de comprimento de arco de uma função vectorial de variável real:

   a) Deduza a fórmula do comprimento de arco,

   b) Mostre que o perímetro P de uma circunferência de raio r é dado por $P = 2\pi r$.

2. As equações $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ relacionam as coordenadas polares com as cartesianas. Estas equações definem r e θ implicitamente como funções de x e y. Utilize a diferenciação implícita para calcular $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ e $\frac{\partial \theta}{\partial y}$.

3. Suponha que f seja uma função $z = f(x,y)$ com derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e

$\frac{\partial z}{\partial y}$. Interprete geometricamente, com o auxílio de esboços, qual o significado das derivadas parciais anteriores.

4. Seja a função $\mathbf{F} = e^x \ln y\mathbf{i} + \frac{e^x}{y}\mathbf{j}$:

   a) Calcule $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$, sendo $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ entre $1 \le t \le 3$,

   b) Prove que o integral anterior é independente do percurso e calcule o seu valor através do teorema fundamental dos integrais de linha.

5. Considere a região definida por $1 - \cos\theta \le r \le \sin\theta$. Calcule a área definida pela região acima e represente graficamente a região em causa.

6. Represente graficamente e calcule o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = 2x^2 + y^2$ e pelo cilindro $z = 4 - y^2$. Utilize coordenadas rectangulares.

7. Calcule $\iint_\sigma \left(x^2 + y^2\right) dS$ sobre a superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Formulário:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{8}\left(2x^2 - a^2\right)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

Prof: Alzira Dinis

Prof: Ana Fonseca