Universidade Fernando Pessoa
Departamento de Ciências e Tecnologia

Exame de **Análise Matemática II**

Exame da época finalista

Eng^a do Ambiente, Eng^a Civil, Eng^a da Qualidade e Eng^a Informática

24 de Setembro de 2001

INSTRUÇÕES:

- A duração desta prova é de **2 horas** com **30 minutos** de tolerância.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou escrever a lápis.
- Leia as questões ATENTAMENTE.
- Apresente todos os cálculos que efectuar, **JUSTIFICANDO** devidamente as respostas.

Responda em folhas SEPARADAS aos grupos I, II e III.

Grupo I

1. (3 valores) Deduza, em coordenadas cilíndricas, a fórmula do comprimento de arco de uma curva cujo vector posição é $\vec{R}$.

2. (3 valores) Considere a função $z = z(x,y)$ definida implicitamente pela equação $\varphi(x^2 + y^2 - z^2, e^z) + \psi(z^2 + x) = 0$ onde φ e ψ são diferenciáveis em ordem aos seus argumentos. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em função de x,y e z e das derivadas parciais $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial w}$, fazendo $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = e^z$ e $w = z^2 + x$.

3. (2 valores) O caudal Q no plano (x,y) é dado por $Q = \log_e \sqrt{x^2 + y^2}$. Determine a taxa de variação de Q em $(1,1)$ segundo a direcção do vector unitário $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$.

Grupo II

4. Seja $F(x,y) = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + \vec{k}$.

a) (1,5 valores) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$, sendo $\vec{R} = t\vec{i} + e^t\vec{j} + \cos t\vec{k}$ entre $0 \le t \le \pi$.

b) (1,5 valores) Prove que o integral da alínea anterior é independente do percurso de integração e calcule o seu valor através do teorema fundamental dos integrais de linha.

5. Considere o sólido limitado inferiormente pelo plano $z = 1$, superiormente pela superfície $z = xy^2 + 2$, e lateralmente pelo cilindro definido por $y = 0$, $y = 2 - x$ e $y = x^2$.

a) (2 valores) Calcule o volume deste sólido através de um integral triplo.

b) (1 valor) Troque a ordem de integração relativamente às variáveis *x* e *y*. Não é necessário resolver o novo integral.

c) (1 valor) Calcule o volume do sólido através de um integral duplo.

Álvaro Monteiro
Ana Fonseca
Maria Alzira Dinis

Grupo III

6. (3 valores) Calcule e represente o valor da região $\Re^3$ limitada por $z \geq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \geq 4$ e $z \leq 8$.

7. (2 valores) Seja σ a parte superior do hemisfério dada por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ orientada por um vector normal cujo sentido é concordante com o do eixo dos zz. Determine o fluxo Φ do campo $\vec{F}(x,y,z) = z^2\vec{k}$.

Álvaro Monteiro
Ana Fonseca
Maria Alzira Dinis