



**Universidade Fernando Pessoa**  
**Departamento de Ciência e Tecnologia**  
**Exame de Época Normal      2000/05/29**  
**Análise Matemática II      2º Semestre**

Cursos de Engenharia do Ambiente, Comunicação, Civil, Qualidade e Arquitectura e Urbanismo

**Duração: 2 h**

**Tolerância: 30 min**

**Nota:** Apresente *todos* os cálculos que efectuar, *justificando* devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular. Não pode escrever a lápis. Este exame está dividido em três grupos numerados de I a III. Responda a cada um destes grupos em folhas de exame diferentes.

### **Grupo I**

1. Sabendo que o vector tangente unitário também pode ser escrito como  $\vec{T} = (dx/ds)\vec{i} + (dy/ds)\vec{j}$  e o vector-posição  $\vec{R} = (x(s))\vec{i} + (y(s))\vec{j}$ , prove que o vector gradiente do campo escalar  $z$  é perpendicular ao vector tangente unitário à curva de nível  $z = f(x(s), y(s)) = k$ . *Sugestão: Use a ferramenta “derivada”.* (2,5 valores)
2. Duas estradas rectas cruzam-se formando um ângulo recto. O carro A desloca-se numa das estradas no sentido contrário do cruzamento, a uma velocidade de 50 km/h. O carro B desloca-se na outra estrada, também no sentido contrário do cruzamento, a uma velocidade de 10 km/h. Qual o valor da taxa de variação da distância entre os carros, quando o carro A se encontra a 0,6 km do cruzamento e o carro B a 0,5 km do cruzamento? (3 valores)

### **Grupo II**

3. Prove que o integral de linha  $\int_C y \sin(x) dx - \cos(x) dy$  é independente do percurso e calcule o seu valor através do teorema fundamental dos integrais de linha, se C tiver como ponto inicial  $A(\pi, 1)$  e ponto terminal  $B(\pi, 3)$ . (2 valores)
4. Uma partícula P move-se no plano de acordo com a equação de movimento  $\vec{R} = (5 \cos(2\pi t))\vec{i} - (5 \sin(2\pi t))\vec{j}$ .
  - a) No instante  $t = 3/4$  determine  $\vec{V}$ ,  $v$ ,  $\vec{A}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{V} \times \vec{A}$ . (2 valores)
  - b) Converta para coordenadas polares a posição do ponto P para  $t = 3/4$ :

b.1)  $r > 0$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  (0,5 valores)

b.2)  $r < 0$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  (0,5 valores)

5. Seja a função  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ , uma função a duas variáveis.

Calcule,

a) O volume do sólido limitado superiormente pela função  $f(x, y)$  e inferiormente pela região R, situada no primeiro quadrante, relativa ao círculo  $x^2 + y^2 = 9$ . (1,5 valores)

b) A área da região R. (1 valor)

c) A área superficial da parte da superfície correspondente à função  $f(x, y)$  situada acima da região R. (1,5 valores)

d)  $\iint_{\sigma} (xyz) dS$  onde  $\sigma$  é a parte da superfície correspondente à função  $f(x, y)$  situada acima da região R (2 valores)

### ***Grupo III***

6. Seja o integral  $I = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_{\frac{z}{2}}^z \sqrt{z-x} \, dx dz dy$ .

a) Esboce o domínio de integração. (1,5 valores)

b) Inverta a ordem de integração de modo a que a primeira integração se faça em relação a y, e calcule esse integral. (2 valores)

Eng. Alzira Dinis  
Prof. Doutor Álvaro Monteiro  
Prof. Doutor Luis Cunha