Universidade Fernando Pessoa
Departamento de Ciência e Tecnologia

Apontamentos

de

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Maria Alzira Pimenta Dinis
1999

Índice

Pág.

Capítulo I

FUNÇÕES VECTORIAIS

Capítulo I

O conceito de uma função vectorial pode ser o seguinte: Uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e o contradomínio é um subconjunto do espaço n-dimensional $\mathbf{V}^n$ denomina-se função vectorial duma variável real. As funções vectoriais serão representadas pelas letras maísculas, tais como $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, etc.

Todos os resultados sobre continuidade e diferenciabilidade de funções vectoriais continuam válidos para o espaço xyz, contanto que os vectores estejam inscritos em termos dos seus três componentes escalares. Por exemplo, se $\mathbf{F}$ é uma função vectorial do escalar t, então $\mathbf{F}(t) = u(t)\mathbf{i} + v(t)\mathbf{j} + w(t)\mathbf{k}$, onde u, v e w são os três componentes escalares, funções de $\mathbf{F}$; para além disso $\mathbf{F}$ é diferenciável se e somente u, v e w forem diferenciáveis. Se u, v e w são diferenciáveis, então $\mathbf{F}'(t) = u'(t)\mathbf{i} + v'(t)\mathbf{j} + w'(t)\mathbf{k}$, e assim por diante.

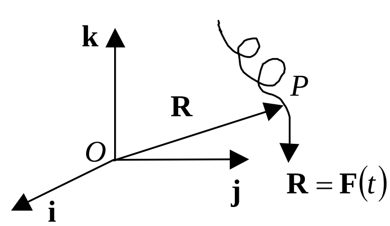
Se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são duas funções vectoriais, então:

1. Se $\lim_{t\to C}\mathbf{F}(t)$ e $\lim_{t\to C}\mathbf{G}(t)$ existem, temos que $\lim_{t\to C}[\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)]$ existe e $\lim_{t\to C}[\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)] = \left[\lim_{t\to C}\mathbf{F}(t)\right]\times\left[\lim_{t\to C}\mathbf{G}(t)\right]$.
2. Se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são contínuas, também a função $\mathbf{H}$ é definida por $\mathbf{H}(t) = \mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)$.
3. Se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são diferenciáveis e $\mathbf{H}$ é definida por $\mathbf{H}(t) = \mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)$, então $\mathbf{H}$ é diferenciável e $\mathbf{H}'(t) = \mathbf{F}'(t)\times\mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}'(t)$.

   Usando a notação de *Leibniz*, podemos reescrever a equação da derivada do produto vectorial como $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt}\times\mathbf{G} + \mathbf{F}\times\frac{d\mathbf{G}}{dt}$.

Curvas e Movimento no Espaço.

Se $\mathbf{F}$ é uma função vectorial tridimensional, então uma equação vectorial da forma $\mathbf{R} = \mathbf{F}(t)$ pode ser entendida como especificando um vector posição $\mathbf{R}$ variável com respeito ao parâmetro t. À medida que t varia, $\mathbf{R}$ percorre a curva no espaço:



Podemos sempre considerar $\mathbf{R} = \mathbf{F}(t)$ fornecendo o vector posição de uma partícula

P em movimento em relação ao tempo t. Uma partícula que se movimente no espaço – partícula P - de acordo com a *equação de movimento* $\mathbf{R} = \mathbf{F}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ onde x, y e z são funções do tempo t, tem um *vector velocidade* $\mathbf{V}$ dado por $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = \mathbf{F}'(t)$ e um *vector aceleração* $\mathbf{A}$, dado por $\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = \mathbf{F}''(t)$.

Raciocinando do mesmo modo como em duas dimensões, conclui-se que o vector velocidade $\mathbf{V}$ é sempre tangente ao percurso feito por P. Também o comprimento $|\mathbf{V}|$ do vector velocidade fornece sempre a *velocidade* instantânea v de P, isto é: $v = \frac{ds}{dt} = |\mathbf{V}| = \left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ onde s é o comprimento do arco medido aolongo do trajecto de P.

<u>Exemplo</u> – Uma partícula P move-se no espaço de acordo com a equação de movimento $\mathbf{R} = (4\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$. No instante em que $t = \pi/2$ encontre o vector velocidade $\mathbf{V}$.

Em qualquer tempo t temos $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt = (-4\sin t)\mathbf{i} + (4\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$. Logo $\mathbf{V} =$ $= \left(-4\sin\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \left(4\cos\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j} + 2\frac{\pi}{2}\mathbf{k} = -4\mathbf{i} + \pi\mathbf{k}$.

Vector Tangente e Comprimento de Arco.

Seja $\mathbf{R} = \mathbf{F}(t)$ a equação vectorial paramétrica de uma curva no espaço. Então, se $|d\mathbf{R}/dt| \neq 0$, um *vector tangente unitário* à curva é dado por $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}/dt}{|d\mathbf{R}/dt|} =$ $= \frac{d\mathbf{R}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{V}}{v}$. Observe que $\mathbf{V} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T} = v\mathbf{T}$ de modo que o vector velocidade é obtido multiplicando o vector tangente unitário pela velocidade. Consideraremos de agora em diante $|d\mathbf{R}/dt| \neq 0$, sendo $\mathbf{T}$ definido como se encontra em cima.

Como $\dfrac{ds}{dt} = \left|\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}$, o *comprimento do arco* da parte da curva $\mathbf{R} = \mathbf{F}(t)$ entre os pontos correspondentes a $t = a$ e $t = b$, respectivamente, é dado por $s = \int_a^b \left|\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$.

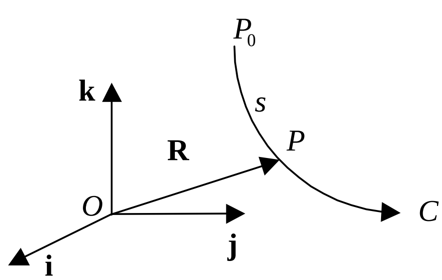
<u>Exemplo</u> – Seja C a curva cuja equação vectorial paramétrica é $\mathbf{R} = \sqrt{6}t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \frac{4}{3}t^3\mathbf{k}$. Encontre o vector tangente unitário $\mathbf{T}$ a C quando $t = 1$.

Aqui $\left|\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}\right| = \sqrt{24t^2 + 9 + 16t^4} = \sqrt{\left(4t^2 + 3\right)^2} = 4t^2 + 3$, então tem-se $\mathbf{T} = \dfrac{d\mathbf{R}/dt}{\left|d\mathbf{R}/dt\right|} =$

$= \dfrac{2\sqrt{6}t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4t^2\mathbf{k}}{4t^2 + 3}$. Para $t = 1$, vem $\mathbf{T} = \dfrac{2\sqrt{6}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{7}$.

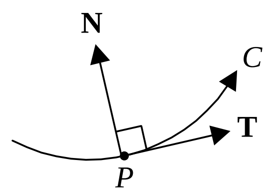
Vector Normal e Curvatura.

Chamaremos, a seguir, de s, o comprimento do arco medido ao longo da curva C entre o ponto fixo inicial P_0 e o ponto P cujo vector posição é $\mathbf{R} = \mathbf{F}(t)$:



Temos que $\dfrac{d\mathbf{R}}{ds} = \dfrac{d\mathbf{R}}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{d\mathbf{R}/dt}{ds/dt} = \mathbf{T}$. O vector $d\mathbf{T}/ds$ é ainda chamado de *vector curvatura*, assim como já o era a duas dimensões. No espaço tridimensional não nos preocupamos em dar um sinal algébrico à *curvatura* k e simplesmente define-se $k = \left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$ com $k \geq 0$.

Como $\mathbf{T}$ é um vector unitário $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$. Diferenciando em relação a s tem-se $\dfrac{d}{ds}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}) = \dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = 2\mathbf{T}\cdot\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$, isto é, $\mathbf{T}\cdot\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$. Portanto, o vector curvatura $d\mathbf{T}/ds$ é sempre perpendicular ao vector tangente $\mathbf{T}$. Se $k \neq 0$, então o vector $\mathbf{N}$ definido $\mathbf{N} = \dfrac{d\mathbf{T}/ds}{\left|d\mathbf{T}/ds\right|} = \dfrac{d\mathbf{T}/ds}{k}$ é consequentemente um vector unitário



perpendicular ao vector tangente $\mathbf{T}$. Tal como a duas dimensões, chama-se a $\mathbf{N}$ *vector normal unitário principal* à curva C. Observe-se que $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}$. Se diferenciarmos ambos os lados da equação $\mathbf{V} = v\mathbf{T}$ em relação a t, obteremos $\mathbf{A} = \dfrac{d\mathbf{V}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\dfrac{d\mathbf{T}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ ou $\mathbf{A} = \dfrac{dv}{dt}\mathbf{T} +$ $+ v^2 k\mathbf{N}$; logo, no mesmo espaço tridimensional, o vector aceleração $\mathbf{A}$ decompõe-se numa *componente vectorial tangencial* $\dfrac{dv}{dt}\mathbf{T}$ e numa *componente vectorial normal* $v^2 k\mathbf{N}$. Fazendo o produto vectorial com $\mathbf{V}$ em ambos os lados da equação $\mathbf{A} = \dfrac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2 k\mathbf{N}$, e usando o facto de que $\mathbf{V} = v\mathbf{T}$, obtemos $\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = \dfrac{dv}{dt}(\mathbf{V} \times \mathbf{T}) +$ $+ v^2 k(\mathbf{V} \times \mathbf{N}) = \dfrac{dv}{dt} v(\mathbf{T} \times \mathbf{T}) + v^2 kv(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) = \mathbf{0} + v^3 k(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) = v^3 k(\mathbf{T} \times \mathbf{N})$. Então tem-se $\mathbf{V} \times \mathbf{A} = v^3 k(\mathbf{T} \times \mathbf{N})$.

Como $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$ são vectores unitários perpendiculares, temos que $|\mathbf{T} \times \mathbf{N}| = |\mathbf{T}||\mathbf{N}| = 1$; logo, pela equação acima $|\mathbf{V} \times \mathbf{A}| = |v^3 k(\mathbf{T} \times \mathbf{N})| = v^3 k|\mathbf{T} \times \mathbf{N}| = v^3 k$. Resolvendo para k, obtemos $k = \dfrac{|\mathbf{V} \times \mathbf{A}|}{v^3}$. Como $v\mathbf{T} = \mathbf{V}$, a equação $\mathbf{V} \times \mathbf{A} = v^3 k(\mathbf{T} \times \mathbf{N})$ pode ser reescrita como $\mathbf{V} \times \mathbf{A} = v^2 k(\mathbf{V} \times \mathbf{N})$. Efectuando o produto vectorial com $\mathbf{V}$, obtém-se $(\mathbf{V} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{V} = v^2 k(\mathbf{V} \times \mathbf{N}) \times \mathbf{V} = v^2 k[(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})\mathbf{N} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{V})\mathbf{V}]$ onde se faz uso da identidade do produto vectorial triplo para expandir $(\mathbf{V} \times \mathbf{N}) \times \mathbf{V}$. Como $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = |\mathbf{V}|^2 = v^2$ e $\mathbf{N} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{N} \cdot (v\mathbf{T}) = v\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = v(0) = 0$, a equação acima pode ser reescrita como $(\mathbf{V} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{V} = v^2 k(v^2\mathbf{N} - 0\mathbf{V}) = v^4 k\mathbf{N}$. Assim, $\mathbf{N} = \dfrac{(\mathbf{V} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{V}}{v^4 k}$.

As equações $k = \dfrac{|\mathbf{V} \times \mathbf{A}|}{v^3}$ e $\mathbf{N} = \dfrac{(\mathbf{V} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{V}}{v^4 k}$ possibilitam-nos achar a curvatura e o vector normal unitário principal em termos do parâmetro original t.

<u>Exemplo</u> – Sendo $\mathbf{R} = (2t^2 + 2)\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\mathbf{j} + (t^2 - 1)\mathbf{k}$, determine $\mathbf{T}$ e k.

$\mathbf{V} = \dfrac{d\mathbf{R}}{dt} = 4t\mathbf{i} + (2t-2)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, portanto $v = |\mathbf{V}| = \sqrt{16t^2 + (2t-2)^2 + 4t^2} =$

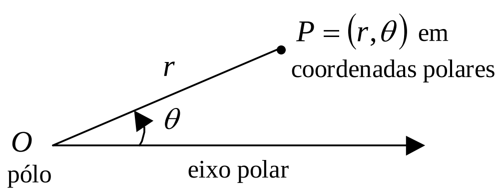
$= 2\sqrt{6t^2 - 2t + 1}$ e $\mathbf{A} = \dfrac{d\mathbf{V}}{dt} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Assim, $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{V}}{v} = \dfrac{2t\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}}{\sqrt{6t^2 - 2t + 1}}$,

$$\mathbf{V} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4t & 2t-2 & 2t \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 8\mathbf{k} = -4(\mathbf{i} - 2\mathbf{k}).$$

Coordenadas Polares.

Em vez de expressar a posição dos pontos por meio de coordenadas cartesianas, é por vezes mais conveniente utilizar outro sistema de coordenadas. Estudaremos o sistema de coordenadas polares, a conversão de coordenadas cartesianas, etc.

Escolhamos um ponto fixo O no plano, chamado *pólo*, e um raio, uma semi-recta orientada fixa – ou semi-eixo – com origem O denominada *eixo polar*:

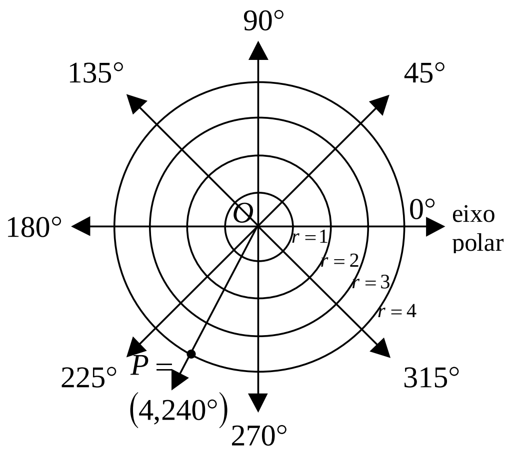


. Um ângulo na *posição padrão* tem vértice no pólo O e o eixo polar como seu lado inicial.

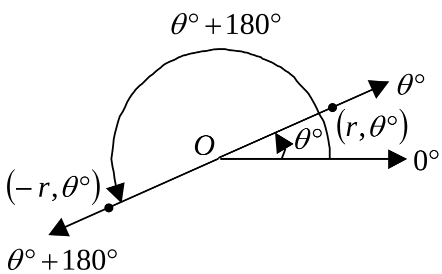
Seja P um ponto genérico do plano e seja r a distância entre P e o pólo O, assim $r = |\mathbf{OP}|$. Se $P \neq 0$, então P pertence a uma única semi-recta determinada com origem O, e esta semi-recta constitui-se no lado terminal de um ângulo na posição fundamental. Este ângulo será notado por θ e o par ordenado (r, θ) por *coordenadas polares* do ponto P - ângulos positivos são medidos no sentido anti-horário. Em coordenadas polares $P = (r, \theta)$.

As coordenadas polares (r, θ) estabelecem a posição do ponto P em relação a uma *grade* formada por círculos concêntricos com centro em O e semi-rectas partindo de O. O valor de r localiza P num círculo de raio r, o valor de θ localiza P numa semi-recta que é o lado terminal do ângulo θ na posição fundamental, e P é determinado pela intersecção do círculo com a semi-recta.

Por exemplo, o ponto (r, θ) em coordenadas polares e igual a $(4, 240°)$ é apresentado na figura seguinte.

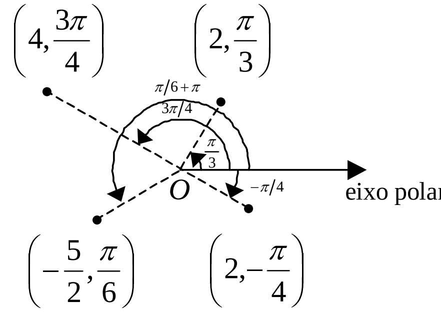


Se $r=0$ no sistema de coordenadas polares, temos que o ponto (r,θ) coincide com o pólo O, não importando qual seja o ângulo θ. É conveniente admitir r negativo, convencionando que o ponto $(-r,\theta°)$ está localizado a $|r|$ unidades do pólo, mas numa semi-recta oposta à de $\theta°$, isto é, sobre o raio $\theta+180°$. Deste modo, teremos assim $(-r,\theta°)=(r,\theta°+180°)$, ou $(-r,\theta)=(r,\theta+\pi)$ para θ em radianos:



. Ao contrário dos sistema de coordenadas cartesianas, um ponto P tem muitas representações diferentes no sistema de coordenadas polares. Não temos apenas, como vimos acima, $(r,\theta°)=(-r,\theta°+180°)$, mas temos também $(r,\theta°)=(-r,\theta°+360°)=$ $=(r,\theta°-360°)$, uma vez que $\pm 360°$ corresponde a uma volta completa em torno do pólo. De facto, se n é um inteiro qualquer, temos $(r,\theta°)=(r,\theta°+360°\cdot n)$, ou, em radianos, $(r,\theta)=(r,\theta+2n\pi)$. Quando se diz *determine o ponto polar* (r,θ), ou *determine o ponto* (r,θ) *no sistema de coordenadas polares*, deve entender-se: desenhe um diagrama mostrando o pólo, o eixo polar e o ponto P cujas coordenadas polares são (r,θ).

Exemplo – Determine os pontos $\left(2,\pi/3\right)$, $\left(4,3\pi/4\right)$, e $\left(2,-\pi/4\right)$ no sistema de coordenadas polares.

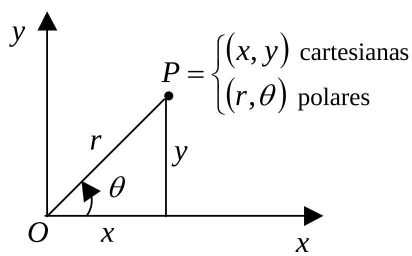


Para determinar o ponto polar $\left(2,\pi/3\right)$, constrói-se um ângulo de $\pi/3$ radianos na posição fundamental e depois localiza-se o ponto a 2 unidades no lado terminal do ângulo.

Os outros pontos são determinados do mesmo modo.

Conversão de Coordenadas.

Por vezes pode trazer vantagens passar da representação cartesiana para a polar, ou vice-versa. É importante perceber que geometricamente os pontos do plano não se alteram – apenas o método pelo qual são representados numericamente varia. O processo usual consiste em considerar o pólo para o sistema de coordenadas polares coincidente com a origem do sistema de coordenadas cartesianas e o eixo polar ao longo do eixo positivo x, assim o eixo positivo é a semi-recta $\theta = \pi/2$. Se considerarmos P o ponto cujas coordenadas polares são (r,θ) com $r > 0$, é claro que as coordenadas cartesianas (x,y) de P serão dadas por $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Quando $r = 0$, isto é verdadeiro, enquanto, se $r > 0$, temos: $\cos\theta = x/r$ e $\sin\theta = y/r$: .



Agora, suponhamos que um ponto P tenha coordenadas polares (r,θ) com $r < 0$ e desejamos encontrar as coordenadas cartesianas (x,y) de P. Visto que $(r,\theta) = (-r,\theta+\pi)$ e $-r > 0$, segue-se pelas equações desenvolvidas acima que: $x = (-r)\cos(\theta+\pi) = -r(\cos\theta\cos\pi - \sin\theta\sin\pi) = -r(-\cos\theta) = r\cos\theta$, e $x = (-r)\sin(\theta+\pi) = -r(\sin\theta\cos\pi + \cos\theta\sin\pi) = -r(-\sin\theta) = r\sin\theta$. Portanto as equações $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ aplicam-se a todos os casos possíveis para converter coordenadas polares (r,θ) de um ponto P em coordenadas cartesianas (x,y) de P. Pelas últimas equações temos $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta =$ $= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$, ou seja, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ para $x \neq 0$. As equações acima não determinam r e θ única e simplesmente porque o ponto P, cujas coordenadas cartesianas são (x,y), tem um número ilimitado de diferentes representações no sistema de coordenadas polares. Ao encontrar-se as coordenadas polares de P, deve prestar-se atenção ao quadrante ao qual P pertence, visto que isto ajudará a determinar θ.

<u>Exemplo</u> – Converta em coordenadas cartesianas:

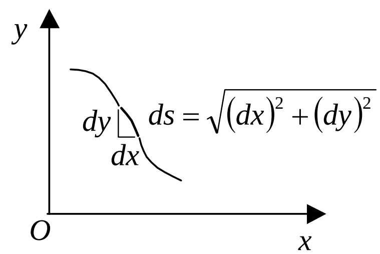
a) $(4{,}30°)$,

b) $(-2, 5\pi/6)$.

a) $(x, y) = (4\cos 30°, 4\sin 30°) = \left(4 \cdot \sqrt{3}/2, 4 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(2\sqrt{3}, 2\right)$,

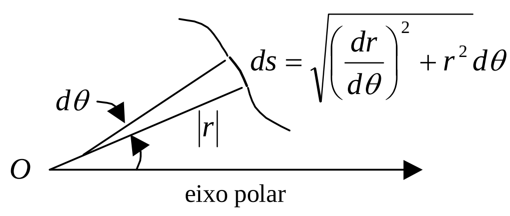
b) $(x, y) = \left(-2\cos\frac{5\pi}{6}, -2\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), -2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{3}, -1\right)$.

Comprimento de Arco de Uma Curva Polar em Coordenadas Polares.



Para uma curva em coordenadas cartesianas, $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ simboliza o diferencial do comprimento de arco. Se convertermos para coordenadas polares, teremos $dx = d(r\cos\theta) = = dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta$ e $dy = d(r\sin\theta) = dr\sin\theta + + r\cos\theta d\theta$.

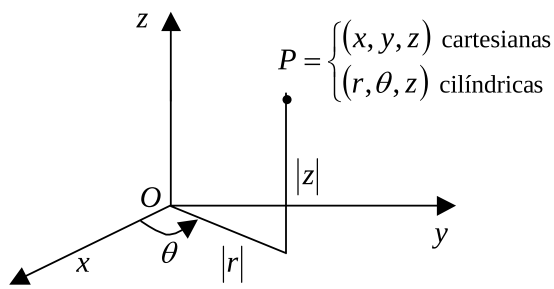
Assim, tem-se $(dx)^2 + (dy)^2 = (dr)^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta\sin\theta(dr)(d\theta) + r^2\sin^2\theta(d\theta)^2 + + (dr)^2\sin^2\theta + 2r\cos\theta\sin\theta(dr)(d\theta) + r^2\cos^2\theta(d\theta)^2 = (dr)^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + r^2 \times (d\theta)^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$, ou seja, $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ e assim $ds = = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2} = \sqrt{\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right](d\theta)^2}$

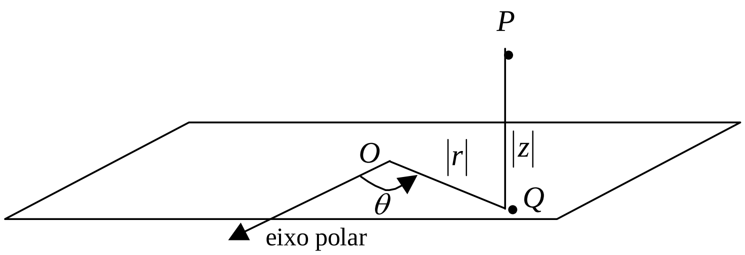


Portanto, em coordenadas polares, $ds = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta$. O *comprimento de arco* da porção da curva polar $r = f(\theta)$ entre $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ é dado por $s = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta$, desde que a derivada f' exista e seja contínua no intervalo $[\alpha, \beta]$.

Coordenadas Cilíndricas.

As coordenadas cilíndricas assemelham-se às polares. Temos assim (r,θ,z). A figura seguinte mostra o ponto P em relação ao sistema cartesiano e em relação ao sistema cilíndrico. Se as coordenadas polares de Q são $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$; logo, as coordenadas cartesianas de P são dadas pelas equações



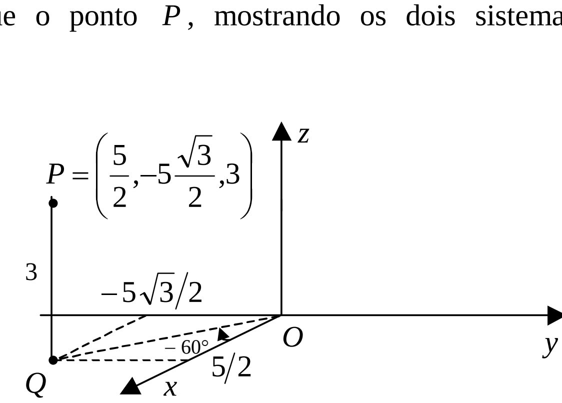


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}.$$

Como o ponto Q, no pé da perpendicular do ponto P ao plano xy, tem um número ilimitado de diferentes representações no sistema polar, temos que P tem um número ilimitado de diferentes representações no sistema cilíndrico. Por exemplo, se $P = (r,\theta,z)$, também se terá $P = (-r,\theta+\pi,z)$. Para qualquer caso, se $P = (x,y,z)$ em coordenadas cartesianas, então as coordenadas cilíndricas de $P = (r,\theta,z)$ devem satisfazer $r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ e, contanto que $x \neq 0$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$. Se $x = 0$, então $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ quando $y > 0$, e $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ quando $y < 0$.

<u>Exemplo</u> – Ache as coordenadas cartesianas do ponto P cujas coordenadas cilíndricas são $(5,-\pi/3,3)$ e marque o ponto P, mostrando os dois sistemas coordenados.

Neste caso temos $x = r\cos\theta = 5\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{5}{2}$, $y = 5\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ e $z = 3$. Logo o ponto P



tem coordenadas cartesianas $\left(5/2, -5\sqrt{3}/2, 3\right)$.

Comprimento de Arco em Coordenadas Cilíndricas.

Uma curva no espaço pode ser expressa parametricamente dando-se as coordenadas cilíndricas (r,θ,z) de um ponto P da curva em termos de um parâmetro t. Assim, se $\begin{cases} r = f(t) \\ \theta = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ onde f, g e h são funções contínuas, então o ponto $P = (r,\theta,z)$ percorre a curva à medida que t varia. Se f', g' e h' existem e são contínuas então das equações $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e $z = z$ obtemos $\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$ e $\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$. Assim temos: $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$. Assim $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\cos^2\theta -$

$- 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\sin^2\theta + 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\sin\theta + r^2 \times$

$\times r^2\cos^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 =$

$= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$. Temos assim que o *comprimento de arco* da curva entre o ponto onde o parâmetro tem o valor $t = a$ e o ponto onde $t = b$ é dado por $s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$.