Capítulo II

CÁLCULO DIFERENCIAL EM CAMPOS ESCALARES E VECTORIAIS

Capítulo II

Até agora trabalhamos sempre com funções de uma única variável real, mas existem muitas situações nas quais a função depende de *diferentes variáveis*.

Exemplo- A área de um rectângulo de lados x e y é dada pela fórmula $S = xy$. A cada par de valores de x e y corresponde um valor bem determinado da superfície S. S é assim função de duas variáveis.

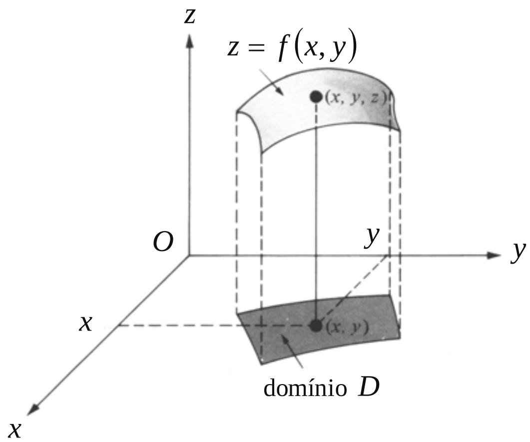
Exemplo – O volume V dum paralelipípedo rectângulo, cujo comprimento das arestas é, respectivamente, x, y, z, é dado pela fórmula $V = xyz$. Aqui V é uma função de três variáveis x, y, z.

Exemplo – O alcance R da trajectória dum projéctil lançado à velocidade inicial v_0 sob um ângulo φ com o horizonte, é dado pela fórmula $R = \dfrac{v_0 \cdot \sin 2\varphi}{g}$ - se se desprezar a resistência do ar. g designa aqui a aceleração da gravidade. A cada par de valores v_0 e φ corresponde um valor bem determinado de R, por outras palavras, R é uma função de duas variáveis v_0 e φ.

Definição – Uma *função real f a duas variáveis reais* é uma relação que transforma num único elemento real z cada par ordenado (x, y) de números reais de um certo conjunto D, chamado de *domínio* da função. Se a relação f transforma no número real z o par ordenado (x, y) em D, então escrevemos $z = f(x, y)$.

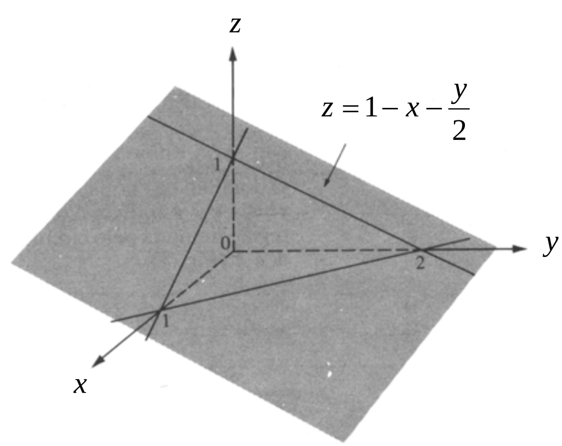
Na equação $z = f(x, y)$, z é a *variável dependente* e x e y *variáveis independentes*. O conjunto de valores possíveis de z, que pode ser obtido aplicando a relação f aos pares ordenados (x, y) em D, é denominado *imagem* da função f.
O *gráfico* de uma função f a duas variáveis é o conjunto dos pontos (x, y, z) no espaço cartesiano tridimensional, tal que (x, y) pertence ao domínio D de f e

$z = f(x, y)$. O domínio D pode ser representado através de um conjunto de pontos no plano xy e o gráfico de f como uma superfície cuja projecção perpendicular ao plano xy é D. Na figura, o ponto indicado como (x, y) é na verdade o ponto $(x, y, 0)$; no entanto, a terceira coordenada foi omitida de propósito. Pode ver-se que quando o ponto (x, y) varia em D, o ponto que lhe vai corresponder, varia sobre a superfície. É o ponto $(x, y, z) = (x, y, f(x, y))$.



Exemplo – A função f cujo domínio D é o plano xy e que está definida pela equação $f(x, y) = 1 - x - (y/2)$, que gráfico apresenta?

O ponto (x, y, z) pertence ao gráfico de f se, e somente se, $z = 1 - x - (y/2)$; isto é, $2x + 2y + 2z = 2$. Portanto, o gráfico de f consiste num plano que intercepta os eixos nos pontos $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,1)$. Na figura seguinte apresenta-se uma parte deste plano, e mostra-se as intersecções com os planos xy, xz e yz: .



Embora o esboço de gráficos de funções a duas variáveis exija maior cuidado do que o esboço a uma variável, a ideia básica é a mesma.

Definição – Uma função real f a n variáveis é uma relação que transforma num único número real w cada n-upla ordenada $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ de números reais de um certo conjunto D, chamado de domínio da função f. Se a relação f transforma no número w a n-upla ordenada $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ então escreve-se $w = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Já sabemos que w é a *variável dependente*, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são *variáveis independentes* e o conjunto de todos os valores possíveis de w que pode ser obtido aplicando a relação f às n-uplas ordenadas $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ em D, é denominado *imagem* da função f. No caso de $n = 2$, temos $w = f(x_1, x_2)$, geralmente representado na forma $z = f(x, y)$ como já vimos. Se $n = 3$ então $w = f(x, y, z)$.

<u>Exemplo</u> – Se f está definida por $f(x, y) = 3x + 2y$ para todos os valores de x e y, encontre a) $f(1,2)$ e b) $f(\sin t, \cos t)$.

a) $f(1,2) = 3 \times 1 + 2 \times 2 = 7$,

b) $f(\sin t, \cos t) = 3\sin t + 2\cos t$.

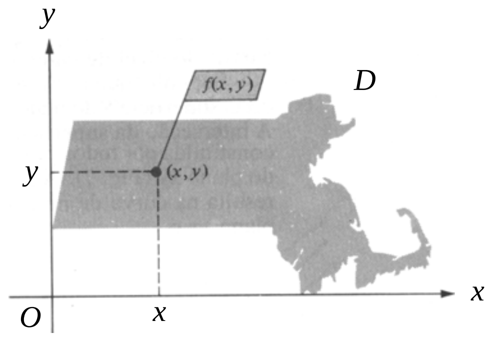
Se uma função f a várias variáveis está definida por uma equação ou uma fórmula, então – a não ser que esteja estipulado o contrário – entende-se por domínio de f o conjunto de todas as n-uplas de variáveis independentes para as quais a equação ou fórmula admitem resposta.

<u>Exemplo</u> – Determine o domínio de $f(x, y, z) = \dfrac{\sin^{-1} z}{x + y}$.

Visto que $\sin^{-1} z$ está definido somente quando $|z| \leq 1$, o domínio de f consiste em todos os termos ordenados (x, y, z) tais que $x + y \neq 0$ e $|z| \leq 1$.

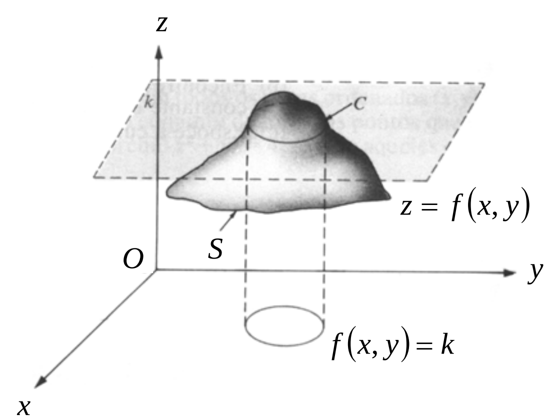
Campo Escalar.

Vimos que um função f a duas variáveis independentes pode ser considerada através do seu gráfico, que é uma superfície no espaço xyz. Há um segundo modo de representar essa função: a função f é considerada um campo escalar num domínio bi-dimensional D. Assim, o domínio D é visualizado como um conjunto de pontos (x, y) numa certa região do plano xy e a cada ponto (x, y) encontra-se associado um escalar correspondente $f(x, y)$ pela função f: . O valor de cada escalar $f(x, y)$ corresponde a cada ponto (x, y) do domínio D e está apresentado na figura como uma bandeira que é fincada no ponto. Como o ponto (x, y) se move no interior da região D, a bandeira desloca-se com ele e o número $f(x, y)$ nela indicado varia. O escalar $f(x, y)$ associado ao ponto (x, y) pode representar, por exemplo, a temperatura em (x, y), ou a pressão atmosférica em (x, y), a velocidade do vento em (x, y), a intensidade do campo magnético em (x, y) e assim por diante.

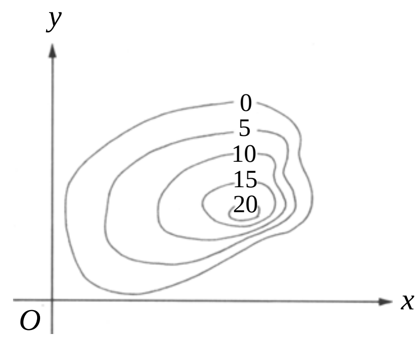


Uma curva ao longo da qual o campo escalar tem valor constante é denominada *curva de nível* do campo ou da função f que define o campo. A equação da curva de nível ao longo da qual a função f assume valor constante k, é $f(x, y) = k$. As curvas de nível recebem nomes específicos dependendo do tipo de campo: *isotérmicas* quando são referentes a um campo de temperatura, *linhas equipotenciais* quando dizem respeito a um campo de potencial eléctrico, etc.

Suponhamos que através de uma função f se estabelece a altura $f(x, y) = k$ de uma certa superfície S do plano xy no ponto (x, y) - S é então o gráfico da função f. A intersecção da superfície S com o plano horizontal $z = k$ produz a curva C, que é constituída por todos os pontos da superfície que estejam a k unidades acima do plano xy: . A projecção perpendicular da curva C sobre o plano xy resulta na curva de nível da função f. Esta curva de nível, cuja equação no plano xy é $f(x, y) = k$ é denominada *linha de contorno* da superfície S. Se desenharmos um certo número de linhas de



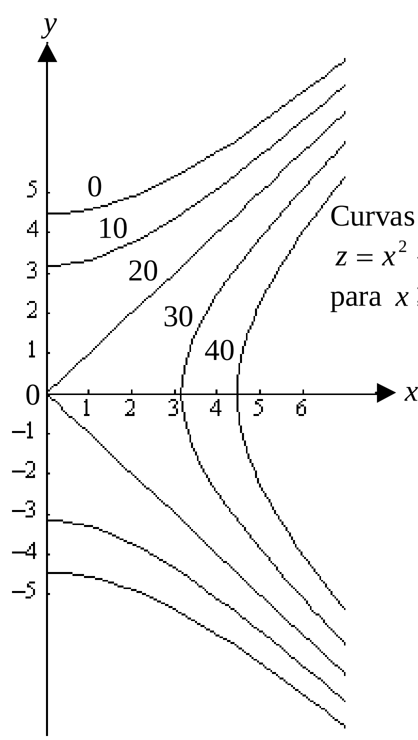
contorno, cada uma identificada pelo próprio valor de k a ela associado, obtemos um *mapa de contorno* da superfície S:



O mapa de contorno facilita-nos a visualização da superfície como se na prática estivéssemos sobre ela, observando as intersecções com planos horizontais de alturas variadas. Se as alturas forem consideradas de modo a diferirem por quantidades iguais, então uma grande quantidade de linhas de contorno sucessivas indica uma parte relativamente íngreme da superfície.

<u>Exemplo</u> – Seja a superfície S dada por $z = x^2 - y^2 + 20$ para $x \geq 0$. Desenhe as linhas de contorno para esta superfície correpondentes a $z = 0$, $z = 10$, $z = 20$, $z = 30$ e $z = 40$.

Para $z = 0$, obtemos $0 = x^2 - y^2 + 20$, ou $y^2 - x^2 = 20$, que é a equação de uma hipérbole com eixo transverso vertical. Desde que $x \geq 0$, obtemos somente as partes desta hipérbole situadas no primeiro e quarto quadrantes como as linhas de contorno para $z = 0$. Para $z = 10$, obtemos $10 = x^2 - y^2 + 20$, ou $y^2 - x^2 = 10$, outra hipérbole. Para $z = 20$, a equação é $20 = x^2 - y^2 + 20$ ou $x = \pm y$, duas rectas passando pela origem. Prosseguindo deste modo, encontramos o mapa de contorno que pretendíamos.



Curvas de nível de $z = x^2 - y^2 + 20$ para $x \geq 0$

Limites e Continuidade.

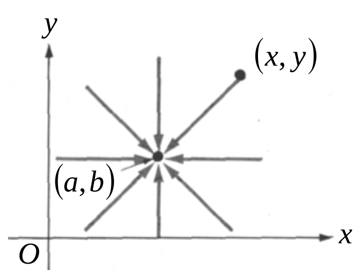
O conceito de limite estende-se facilmente para funções de duas ou mais variáveis.

Por exemplo, afirmar que $f(x,y)$ tende para o limite L quando (x,y) tende para (x_0,y_0) significa que o número $f(x,y)$ pode estar tão perto do número L quanto se deseja pela escolha do ponto (x,y) suficientemente próximo do ponto (x_0,y_0), desde que $(x,y)\neq(x_0,y_0)$. A notação é a seguinte: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$, visto que $1\big/\sqrt{4-x^2-y^2}$ se aproxima de $1\!\!/\!_2$ quando o ponto (x,y) se aproxima de $(0,0)$.

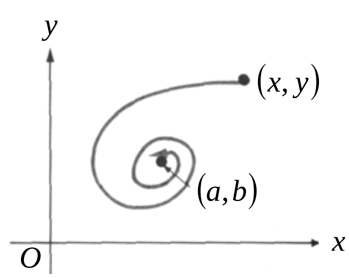
Todas as propriedades de limites de funções de uma variável se estendem às funções a várias variáveis; por exemplo, o limite da soma, diferença, produto ou quociente é a soma, diferença, produto ou quociente dos limites, respectivamente, contanto que esses limites existam e que os denominadores não se anulem. Então, desde que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$ existam, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(y) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$.

<u>Exemplo</u> - $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[e^{\sin(5x^2+y)}+\cos(3xy)\right] = e^{\sin[4\times 0^2+0]}+\cos[3\times 0\times 0] = e^0+\cos 0 = 2$.

Já estudamos que o $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe se, e apenas se, os limites laterais, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, existem e são iguais. Tratando com limites de uma função f a duas variáveis, isto é, tendo-se que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, devemos supor que o ponto (x,y) se aproxime do ponto (a,b) não apenas pela direita ou pela esquerda, mas também por uma qualquer outra direcção:



. Podemos ainda supor que (x,y) se aproxime de (a,b) por exemplo ao longo de uma curva:



. Dizer que o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ significa que quando (x,y) tende para (a,b) por qualquer direcção, $f(x,y)$ tende para o mesmo limite L. Um meio conveniente de mostrar que um determinado limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe é mostrar que $f(x,y)$ tende para dois limites diferentes quando (x,y) tende para (a,b) por duas direcções diferentes.

<u>Exemplo</u> – Seja f a função definida por $f(x,y)=\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)y^2 & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$.

a) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende para $(0,0)$ ao longo da recta $y=mx$.

b) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende para $(0,0)$ ao longo da parábola $x=y^2$.

c) O $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe?

a) Sobre a recta $y=mx$, $f(x,y)=f(x,mx)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)(mx)^2$ para $x\neq 0$ ou seja

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)(mx)^2=\lim_{x\to 0}\left(m^2x^3+m^2x\right)=0.$$

b) Ao longo da parábola $x=y^2$ $f\left(y^2,y\right)=\left(y^2+\dfrac{1}{y^2}\right)y^2$ para $y\neq 0$, assim

$$\lim_{y\to 0} f\left(y^2,y\right)=\lim_{y\to 0}\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)y^2=\lim_{y\to 0}\left(y^4+1\right)=1.$$

c) Uma vez que os limites de a) e b) são diferentes, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

As definições e propriedades dos limites são facilmente generalizadas para as funções a três ou mais variáveis. Por exemplo, se o valor $f(x,y,z)$ se aproxima do valor L tanto quanto queremos pela escolha de um ponto suficientemente próximo de (x_0,y_0,z_0), mas diferente do mesmo, escrevemos então: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=L$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ z\to z_0}} f(x,y,z)=L$.

<u>Definição</u> – Seja f uma função a duas variáveis e seja o ponto (x_0,y_0) no plano xy. Suponhamos que existe um disco circular e com raio positivo, de modo que qualquer

ponto do interior do círculo, excepto possivelmente o centro (x_0, y_0) pertença ao domínio de f. Diz-se então que o limite quando (x, y) tende para (x_0, y_0) é o número L, e escreve-se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ ou $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = L$ desde que, para cada número positivo ε, exista um número positivo δ tal que $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ para qualquer $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ e a distância entre (x, y) e (x_0, y_0) seja menor que δ. De outro modo: para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ implica $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

<u>Exemplo</u> – Mostre que $\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(3x + 2y) = 7$ por aplicação directa da definição anterior.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que $|3x + 2y - 7| < \varepsilon$ sempre que $0 < (x-1)^2 + (y-2)^2 < \delta^2$. Então $|3x + 2y - 7| = |3x - 3 + 2y - 4| \leq |3x - 3| + |2y - 4| \leq$ $\leq |3(x-1)| + |2(y-2)| \leq 3|x-1| + 2|y-2|$; daí, se $3|x-1| \leq \varepsilon/2$ e $3|y-2| \leq \varepsilon/2$, então $|3x + 2y - 7| \leq 3|x-1| + 2|y-2| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. A condição $3|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ é equivalente a $9(x-1)^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{4}$, ou a $(x-1)^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{36}$, enquanto a condição $2|y-2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ é equivalente a $4(y-2)^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{4}$ ou a $(y-2)^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{16}$. Portanto, se $(x-1)^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{36}$ e $(y-2)^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{16}$, teremos $|3x + 2y - 7| < \varepsilon$. Assim ,escolhemos $\delta = \varepsilon/6$ e note-se que se $0 < (x-1)^2 +$ $+ (y-2)^2 < \delta^2 = \varepsilon^2/36$, então $(x-1)^2 \leq (x-1)^2 + (y-2)^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{36}$ e também $(y-2)^2 \leq (x-1)^2 + (y-2)^2 < \dfrac{\varepsilon^2}{36} < \dfrac{\varepsilon^2}{16}$; portanto, $(x-1)^2 < \varepsilon^2/36$ e também $(y-2)^2 < \varepsilon^2/16$, ou seja $|3x + 2y - 7| < \varepsilon$.

Continuidade.

A definição de continuidade para funções a uma variável pode generalizar-se facilmente para funções a várias variáveis.

<u>Definição</u> – Supondo que f seja uma função a duas variáveis e que o ponto (x_0, y_0) seja o centro de um disco circular de raio positivo contido no domínio de f, dizemos que f é contínua em (x_0, y_0) se:

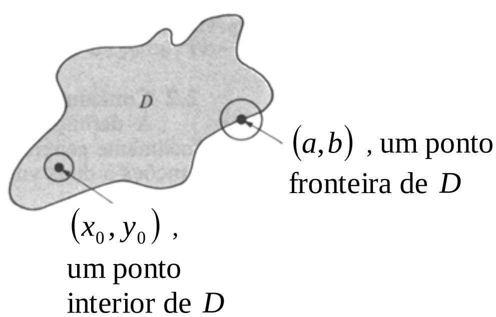
i) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe;

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

<u>Exemplo</u> – Verifique se $f(x,y) = 3x^2 + 2xy$ é contínua no ponto $(-1,3)$.

Das propriedades dos limites, $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,3)} (3x^2 + 2xy) = 3\times(-1)^2 + 2\times(-1)\times 3 = -3 =$ $= f(-1,3)$, logo f é contínua em $(-1,3)$.

Seja D um conjunto de pontos no plano xy. Um ponto (x_0, y_0) será denominado *ponto interior* a D se existir um disco circular de raio positivo e centro, em (x_0, y_0), contido em D:



. Por outro lado, um ponto (a,b) será denominado *ponto fronteira* de D se qualquer disco circular de raio positivo com centro (a,b) contiver, pelo menos, um ponto pertencente a D e pelo menos um não pertencente. Não se exige que um ponto fronteira (a,b) pertença ao conjunto D. Um conjunto é *aberto* se ele não contém nenhum dos seus próprios pontos fronteira, sendo *fechado* se os contém todos. A definição que vimos aplica-se apenas à continuidade de uma função num ponto interior do seu domínio. Para definir a continuidade num ponto fronteira é necessária outra definição. É claro que uma função é *contínua* se o for para qualquer ponto do seu domínio. Para demonstrar que um conjunto D de pontos num plano é aberto, é necessário mostrar que qualquer ponto em D é ponto interior.

As funções a duas variáveis têm muitas propriedades, relacionadas com a continuidade, análogas às das funções de uma só variável.

Propriedades da Continuidade para Funções a Duas Variáveis.

Suponha-se que (x_0, y_0) seja um ponto interior aos domínios das funções f e g a duas variáveis e suponhamos ainda que f e g são contínuas em (x_0, y_0). Temos assim:

1. $h(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$ é contínua em (x_0, y_0)
2. $k(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$ é contínua em (x_0, y_0)
3. $p(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y)$ é contínua em (x_0, y_0)
4. Se $g(x_0, y_0) \neq 0$, então $q(x, y) = \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$ é contínua em (x_0, y_0)
5. Se w é uma função a uma variável que é contínua e está definida no ponto $f(x_0, y_0)$ e se (x_0, y_0) é ponto interior ao domínio de $v(x, y) = w[f(x, y)]$, então v é contínua em (x_0, y_0).

As definições e propriedades das funções contínuas são facilmente generalizadas para funções a três ou mais variáveis. Naturalmente, toda a função polinomial a várias variáveis é contínua.

Derivadas Parciais.

As técnicas, regras e fórmulas já aprendidas para diferenciar funções a uma variável podem generalizar-se para funções a duas ou mais variáveis, considerando uma das variáveis constante e diferenciando as outras em relação à variável remanescente.

<u>Exemplo</u> – Consideremos a função f a duas variáveis dada por $f(x, y) =$ $= x^2 + 3xy - 4^2$. Consideremos, temporariamente, a segunda variável y como constante e vamos diferenciar em relação à primeira variável x. Sendo que y é constante, tem-se, $\dfrac{d}{dx}(3xy) = 3y\dfrac{d}{dx}(x) = 3y$ e $\dfrac{d}{dx}\left(-4y^2\right) = 0$; portanto, $\dfrac{d}{dx} f(x, y) =$

$= \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}(3xy) + \frac{d}{dx}\left(-4y^2\right) = 2x + 3y + 0 = 2x + 3y$. A fim de enfatizar que apenas x pode variar, ou seja, que y deve ser mantido constante quando a derivada é calculada, é usual substituir-se o símbolo d/dx por $\partial/\partial x$. Portanto teremos $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 3xy - 4y^2\right) = 2x + 3y$. A derivada calculada em relação a x enquanto y é mantido temporariamente constante é denominada *derivada parcial em relação a* x, e $\partial/\partial x$ é chamado de *operador derivada parcial* em relação a x. Do mesmo modo, se desejarmos manter a variável x fixa e diferenciarmos em relação a y, usamos o símbolo $\partial/\partial y$. Temos assim para a função f definida por $f(x,y) =$ $= x^2 + 3xy - 4y^2$: $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 3xy - 4y^2\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(3xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-4y^2\right) =$ $= 0 + 3x - 8y = 3x - 8y$.

<u>Definição</u> – Se f é uma função a duas variáveis e (x,y) é um ponto no domínio de f, então as derivadas parciais $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ de f em (x,y) em relação à primeira e à segunda variável são definidas por $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$ desde que os limites existam. O procedimento para encontrar as derivadas parciais chama-se *diferenciação parcial*. Convém existir uma notação para derivadas parciais semelhante à notação $f'(x)$ para funções de uma variável. Então, se $z = f(x,y)$, escreve-se $f_1(x,y)$ ou $f_x(x,y)$ em vez de $\partial z/\partial x$ ou $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ para a derivada parcial de f em relação a x. O índice 1 – e respectivamente o índice x - refere-se à diferenciação parcial em relação à primeira variável – ou, em relação a x. A notação do operador Df para derivadas ordinárias pode ser adaptada para derivadas parciais, e teremos $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = f_1(x,y) =$ $= f_x(x,y) = D_1 f(x,y) = D_x f(x,y)$. Analogamente, para a derivada parcial em relação a y teremos: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_2(x,y) = f_y(x,y) = D_2 f(x,y) = D_y f(x,y)$.

Definição – Seja f uma função a n variáveis e suponha que $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ pertence ao domínio de f. Se $1 \le k \le n$, então a derivada parcial de f em relação à k-ésima variável x_k é notada por f_k e definida por $f_k = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n) =$ $= \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}$ desde que o limite exista.

Se $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$, então usamos também as seguintes notações para a derivada parcial de f em relação à k-ésima variável x_k: $\dfrac{\partial w}{\partial x_k} =$ $= \dfrac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = fx_k(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = D_k f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n) =$ $= Dx_k f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$. Utiliza-se o termo derivada parcial quando nos referimos à função f_k e ao valor $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ desta função. No caso de $n = 3$, as variáveis x_1, x_2 e x_3 da última definição são substituidas por x, y e z, repectivamente, e temos, $f_1(x, y, z) = f_x(x, y, z) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$, $f_2(x, y, z) = f_y(x, y, z) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$, $f_3(x, y, z) = f_z(x, y, z) =$ $= \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$.

Técnicas para o Cálculo das Derivadas Parciais.

As derivadas parciais podem ser calculadas pelo uso das mesmas técnicas que eram válidas para funções ordinárias, excepto que todas as variáveis independentes, que não aquela em relação à qual efectuamos a derivação parcial, são tomadas temporariamente como constantes.

Exemplo – Encontre $f_x(1,2)$ e $f_y(1,2)$ se $f(x, y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$.

Tratando y como constante e diferenciando em relação a x, temos $f_x(x, y) =$

$=6x^2y^2+4$. Tratando x como constante e diferenciando em relação a y, temos $f_y(x,)=4x^3y+2$. Substituindo $x=1$ e $y=2$ nestas fórmulas de derivação parcial temos então: $f_x(1,2)=6(1)^2(2)^2+4=28$, $f_y(1,2)=4(1)^3(2)+2=10$.

Exemplo – Encontre $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ se $z=x^4\sin(xy^3)$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[x^4\sin(xy^3)\right]=x^4\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\sin(xy^3)\right]+\sin(xy^3)\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}(x^4)=x^4\cos(xy^3)\cdot y^3+\sin(xy^3)\times$ $\times 4x^3=x^4y^3\cos(xy^3)+4x^3\sin(xy^3)$. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[x^4\sin(xy^3)\right]=x^4\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\sin(xy^3)\right]+$ $+\sin(xy^3)\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}(x^4)=x^4\cos(xy^3)\cdot 3xy^2+\sin(xy^3)\cdot 0=3x^5y^2\cos(xy^3)$.

Existem muitas versões da *regra da cadeia* aplicadas às derivadas parciais, a mais simples de todas é virtualmente uma transcrição da regra da cadeia para funções a mais de uma variável – suponhamos duas. Se $w=f(v)$ e $v=g(x,y)$, ou seja $w=f[g(x,y)]$, mantendo y constante e utilizando a regra da cadeia conhecida temos $\dfrac{\partial w}{\partial x}=f'[g(x,y)]g_x(x,y)=f'(v)\dfrac{\partial v}{\partial x}$; isto é, $\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$, desde que as derivadas $\partial w/\partial v$ e $\partial v/\partial x$ existam. Analogamente, mantendo-se x constante temos $\dfrac{\partial w}{\partial y}=f'[g(x,y)]g_y(x,y)=f'(v)\dfrac{\partial v}{\partial y}$; isto é $\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$ desde que as derivadas $\partial w/\partial v$ e $\partial v/\partial y$ existam.

Exemplo – Se $z=x^2y$, $x=t^2$, $y=t^3$, use a regra da cadeia para encontrar dz/dt, e verifique o resultado expressando z como função de t e diferenciando directamente.

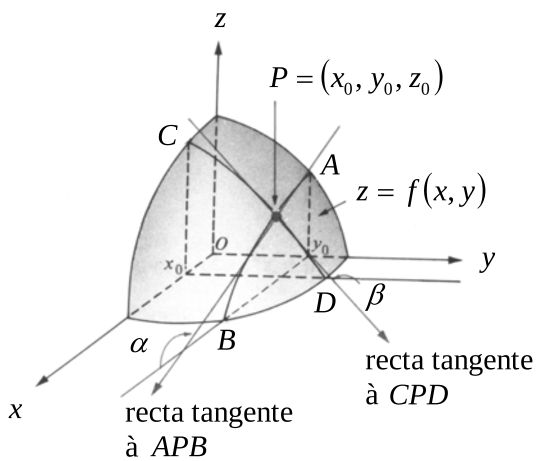
Pela regra da cadeia $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=(2xy)(2t)+(x^2)(3t^2)=(2t^5)(2t)+(t^4)(3t^2)=$ $=7t^6$. Alternativamente, podemos expressar z directamente como função de t, $z=x^2y=(t^2)^2(t^3)=t^7$ e depois diferenciar para obter $\dfrac{dz}{dt}=7t^6$, mas este último processo nem sempre é conveniente.

Exemplo – Encontre $\partial w / \partial x$ e $\partial w / \partial y$ para $w = e^{x/y}$.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^{x/y}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = e^{x/y}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{e^{x/y}}{y};\ \frac{\partial w}{\partial y} = e^{x/y}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = e^{x/y}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{xe^{x/y}}{y^2}.$$

Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais.

Suponhamos que f seja uma função a duas variáveis e que f tenha derivadas parciais f_1 e f_2. O gráfico de f é uma superfície com equação $z = f(x, y)$: . Seja $z_0 = f(x_0, y_0)$, tal que o ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ seja um ponto desta superfície. O plano $y = y_0$ é o que intercepta a superfície na secção APB, enquanto que o plano $x = x_0$ a intercepta na secção CPD. Quando um ponto se move ao longo da curva APB, as suas coordenadas x e z variam de acordo com a equação $z = f(x, y_0)$ enquanto a sua coordenada y permanece constante com $y = y_0$. A inclinação da recta tangente à APB num ponto qualquer é a taxa de variação da coordenada z em relação à coordenada x; a inclinação é dada por $\partial z/\partial x = f_1(x_0, y_0)$. Em particular, $f_2(x_0, y_0)$ representa o coeficiente da recta tangente à CPD no ponto P. Pela figura temos assim: $\tan\alpha = f_1(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ calculado em (x_0, y_0) e $\tan\beta = f_2(x_0, y_0) =$ $= f_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ calculado em (x_0, y_0).



Diferencial Total.

Suponha que f seja uma função a duas variáveis e seja $z = f(x, y)$. Se x e y

sofrem pequenas variações Δx e Δy, respectivamente, então z varia de uma quantidade de Δz, dada por $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$. Considerando que f seja diferenciável em (x,y), sabemos que o erro resultante da aproximação linear $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_1(x,y)\Delta x + f_2(x,y)\Delta y$ será pequeno, e segue-se que podemos aproximar Δz como $\Delta z \approx f_1(x,y)\Delta x + f_2(x,y)\Delta y$. Usando a notação alternativa $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$ para as derivadas parciais $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$ podemos escrever a aproximação como $\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. A variação Δx e Δy das duas variáveis x e y são às vezes chamadas de *diferenciais* destas variáveis e escritas como dx e dy, respectivamente. Desse modo, se dx e dy são pequenos, então a variação Δz do valor de z causada pela alteração de x para $x+dx$ e de $y+dy$ é aproximada por $\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Fazendo a analogia com funções a uma variável, define-se o *diferencial total* dz da variável dependente z por $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Portanto, se dx e dy são pequenos, então $\Delta z \approx dz$. Uma vez que $z = f(x,y)$, escrevemos também dz como df, ou seja $df = f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy$.

<u>Exemplo</u> – Se $f(x,y) = 3x^3y^2 - 2xy^3 + xy - 1$, encontre o diferencial total df.

Aqui, $f_1(x,y) = 9x^2y^2 - 2y^3 + y$ e $f_2(x,y) = 6x^3y - 6xy^2 + x$, e assim $df =$
$= (9x^2y^2 - 2y^3 + y)dx + (6x^3y - 6xy^2 + x)dy$.

Diferenciação Implícita.

O procedimento da diferenciação implícita, já conhecido, pode ser generalizado pelo uso de derivadas parciais. Dada uma equação na qual figurem as variáveis x e y, podemos transpor os termos para a esquerda do sinal de igualdade e a equação toma a forma $f(x,y) = 0$, onde f é uma função a duas variáveis. Esta equação define y *implicitamente* como uma função g de x se $f(x, g(x)) = 0$ é válida para todo o valor de x no domínio de g. Considerando que f e g sejam diferenciáveis, então podemos diferenciar ambos os lados da equação $f(x, g(x)) = 0$ em relação a x e obter $f_1(x, g(x))\frac{dx}{dx} + f_2(x, g(x))\frac{d}{dx}g(x) = 0$ ou $f_1(x, y) + f_2(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$, onde $y = g(x)$. Se $f_2(x, y) \neq 0$, podemos resolver a última equação em $\frac{dy}{dx}$, obtendo portanto $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$.

<u>Exemplo</u> – Suponha que y seja uma função implícita de x dada por $x^3y^2 + 3xy^2 + 5x^4 = 2y + 7$. Encontre o valor de $\frac{dy}{dx}$ quando $x = 1$ e $y = 1$.

Transpomos os termos da esquerda e colocamos a equação na forma $f(x, y) = 0$, onde $f(x, y) = x^3y^2 + 3xy^2 + 5x^4 - 2y - 7$. Aqui, $f_1(x, y) = 3x^2y^2 + 3y^2 + 20x^3$ e $f_2(x, y) = 2x^3y + 6xy - 2$, e assim, $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} = -\frac{3x^2y^2 + 3y^2 + 20x^3}{2x^3y + 6xy - 2}$.

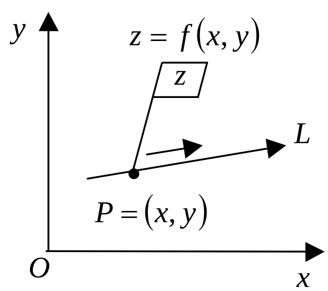
Portanto, quando $x = 1$ e $y = 1$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{3 + 3 + 20}{2 + 6 - 2} = -\frac{13}{3}$.

Em geral, dada uma equação na forma $f(x, y, z) = 0$ onde figurem três variáveis, ela pode ser resolvida para uma das variáveis, por exemplo y, em termos das outras duas variáveis x e z. Esta solução tem a forma $y = g(x, z)$, então $f(x, g(x, z), z) = 0$ é válida para todos os pontos (x, z) no domínio da função g. Dizemos também que a equação $f(x, y, z) = 0$ define y implicitamente como uma função g de x e z. Assumindo que as funções f e g sejam diferenciáveis, podemos tomar as derivadas parciais em relação a x e também em relação a z em ambos os lados da equação $f(x, y, z) = 0$ para obter $f_1(x, y, z)\frac{\partial x}{\partial x} + f_2(x, y, z)\frac{\partial y}{\partial x} + f_3(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ e $f_1(x, y, z)\frac{\partial x}{\partial z} + f_2(x, y, z)\frac{\partial y}{\partial z} + f_3(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial z} = 0$. Visto que x e z são variáveis independentes, temos $\partial z/\partial x = 0$, $\partial x/\partial z = 0$, $\partial x/\partial x = 1$ e $\partial z/\partial z = 1$. Portanto podemos representar a equação anterior sob a forma $f_2(x, y, z)\frac{\partial y}{\partial x} = -f_1(x, y, z)$ e

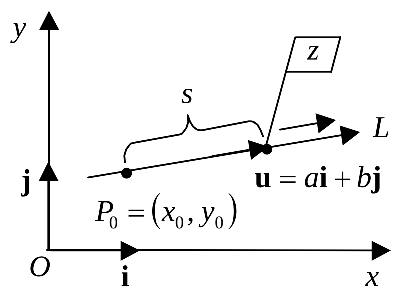
$f_2(x,y,z)\dfrac{\partial y}{\partial z} = -f_3(x,y,z)$. Então, se $f_2(x,y,z) \neq 0$, podemos resolver $\partial y/\partial x$ e $\partial y/\partial z$, obtendo $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{f_1(x,y,z)}{f_2(x,y,z)}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial z} = -\dfrac{f_3(x,y,z)}{f_2(x,y,z)}$.

Derivadas Direccionais e Gradiente no Plano.

Consideremos um campo escalar no plano xy descrito por uma função diferenciável a duas variáveis. Desse modo, se $z = f(x,y)$, então z é o valor do campo escalar no ponto $P = (x,y)$. Seja L uma recta no plano xy. Quando P se move ao longo de L, z pode variar e faz sentido perguntar pela taxa de variação dz/ds de z em relação à distância s medida ao longo de L:



. De modo a encontrarmos dz/ds, introduz-se um vector unitário $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ paralelo a L na direcção do movimento de P ao longo de L:



. Se $P = (x,y)$ está a s unidades de um ponto fixado $P_0 = (x_0, y_0)$ em L, então $\mathbf{P_0P} = s\mathbf{u}$; isto é $(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} = as\mathbf{i} + bs\mathbf{j}$. Igualando os termos tem-se $x - x_0 = as$ e $y - y_0 = bs$; isto é, $x = x_0 + as$ e $y = y_0 + bs$. Portanto tem-se, $\dfrac{dx}{ds} = a$ e $\dfrac{dy}{ds} = b$, seguindo-se a regra da cadeia $\dfrac{dz}{ds} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{ds} = \dfrac{\partial z}{\partial x}a + \dfrac{\partial z}{\partial y}b$. A derivada dz/ds, que é a taxa de variação do campo escalar z em relação à distância medida na direcção do vector unitário $\mathbf{u}$, é denominada *derivada direccional* de z - ou derivada direccional da função f - na direcção de $\mathbf{u}$ e é escrita como $D_{\mathbf{u}}z$ - ou $D_{\mathbf{u}}f$. Temos assim: $D_{\mathbf{u}}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}a + \dfrac{\partial z}{\partial y}b$ ou $D_{\mathbf{u}}f(x,y) = f_1(x,y)a + f_2(x,y)b$, onde $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Em particular, se $\mathbf{u}$ é o vector unitário que faz um ângulo θ com o eixo positivo de x, então $\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}$ e $D_{\mathbf{u}}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta +$

$+\dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$ ou $D_{\mathbf{u}} f(x,y) = f_1(x,y)\cos\theta + f_2(x,y)\sin\theta$.

<u>Exemplo</u> – Encontre a derivada direccional de $f(x,y) = 3x^2 y$ no ponto $(1,2)$ na direcção do vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

As derivadas parciais de f são $f_x(x,y) = 6xy$, $f_y(x,y) = 3x^2$, portanto $f_x(1,2) = 12$, $f_y(1,2) = 3$. Assim, a derivada direccional em $(1,2)$ é $D_{\mathbf{u}} f(1,2) = f_x(1,2)u_1 +$ $+ f_y(1,2)u_2 = 12u_1 + 3u_2$ onde u_1 e u_2 são componentes do vector unitário na direcção da diferenciação. Então, se $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{1}{\sqrt{25}}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = \dfrac{3}{5}\mathbf{i} + \dfrac{4}{5}\mathbf{j} =$ $= u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$. Logo, $D_{\mathbf{u}} f(1,2) = 12\left(\dfrac{3}{5}\right) + 3\left(\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{48}{5}$.

As derivadas direccionais de z nas direcções dos eixos positivos de x e y são as derivadas parciais e z em relação a x e y respectivamente. A derivada direccional $D_{\mathbf{u}} z$ pode ser expressa no forma de produto escalar: $D_{\mathbf{u}} z = \dfrac{\partial z}{\partial x}a + \dfrac{\partial z}{\partial y}b = a\dfrac{\partial z}{\partial x} +$ $+ b\dfrac{\partial z}{\partial y} = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j})\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}\right) = \mathbf{u}\cdot\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}\right)$. O vector $\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}$ cujos componentes escalares são as derivadas parciais de z com respeito a x e y é denominado *gradiente* do campo escalar z - ou da função f e é escrito como ∇z - ou como ∇f . O símbolo ∇, um delta grego invertido, é chamado de *nabla*. Tem-se assim: $\nabla z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}$ ou $\nabla f(x,y) = f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j}$ e podemos escrever a derivada direccional como $D_{\mathbf{u}} z = \mathbf{u}\cdot\nabla z$ ou $D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \mathbf{u}\cdot\nabla f(x,y)$. Assim, e traduzindo por palavras, a derivada direccional de um campo escalar numa dada direcção é o produto escalar desta direcção pelo gradiente do campo escalar.

<u>Exemplo</u> – Se $z = 4x^2 - 5xy^2$, encontre a) ∇z , b) o valor de ∇z no ponto $(2,-3)$ e c) a derivada direccional $D_{\mathbf{u}} z$ no ponto $(2,-3)$ e na direcção do vector unitário

$\mathbf{u} = \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}$.

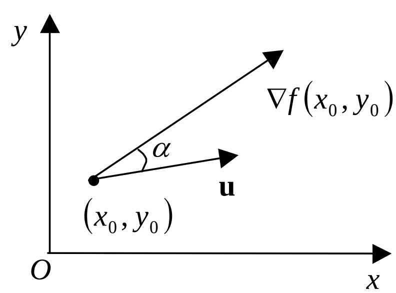
a) $\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} = \left(8x - 5y^2\right)\mathbf{i} + \left(-10xy\right)\mathbf{j}$,

b) No ponto $(2,-3)$, $\nabla z = \left[8(2) - 5(-3)^2\right]\mathbf{i} + \left[-10(2)(-3)\right]\mathbf{j} = -29\mathbf{i} + 60\mathbf{j}$,

c) No ponto $(2,-3)$, $D_{\mathbf{u}} z = \mathbf{u} \cdot \nabla z = \left[\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}\right] \cdot \left(-29\mathbf{i} + 60\mathbf{j}\right) =$

$$= -20\cos\frac{\pi}{3} + 60\sin\frac{\pi}{3} = (-29)\left(\frac{1}{2}\right) + (60)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{60\sqrt{3} - 29}{2}.$$

Se fixarmos um ponto (x_0, y_0) no plano xy, então a derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(x_0, y_0)$ depende apenas da escolha do vector unitário $\mathbf{u}$, visto que o vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ está fixado. Se α é o ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\nabla f(x_0, y_0)$:



, então pela definição de produto escalar, $\mathbf{u} \cdot \nabla f(x_0, y_0) = |\mathbf{u}| \cdot |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\alpha$. Uma vez que $|\mathbf{u}| = 1$, então $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos\alpha$. Quando variamos o ângulo α na última fórmula, obtemos o valor da derivada direccional em várias direcções no ponto (x_0, y_0). Tomando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, temos $\cos\alpha = 0$, ou seja $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = 0$.

Então podemos dizer que:

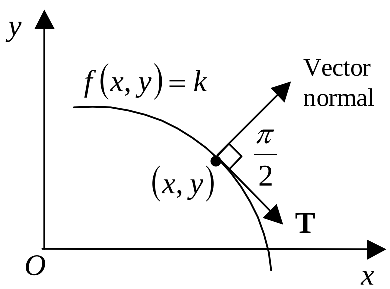
i) A derivada direccional é nula quando tomamos a direcção perpendicular ao gradiente.

Desde que $\cos\alpha$ assume o seu valor máximo, ou seja 1, quando $\alpha = 0$, podemos dizer que:

ii) A derivada direccional assume o seu valor máximo quando tomamos a direcção do gradiente e esse valor máximo é $|\nabla f(x_0, y_0)|$. Por outras palavras, o gradiente de um campo escalar, calculado num ponto P, é um vector cuja direcção indica a direcção na qual o campo escalar aumenta mais rapidamente, enquanto o módulo do vector gradiente é numericamente igual à taxa instantânea de aumento do campo por unidade de distância nesta direcção quando no ponto P.

Vectores Normais e Curvas de Nível no Plano.

Consideremos um campo escalar no plano dado por $z = f(x, y)$, onde f é uma função diferenciável. A curva no plano ao longo da qual z tem valor constante, por exemplo k, tem a equação $f(x, y) = k$ e tem um vector unitário $\mathbf{T} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}$, onde s é o comprimento do arco, medido ao longo da curva: . Diferenciando ambos os lados da equação $f(x, y) = k$ em relação a s pela utilização da regra da cadeia, obtém-se a equação $f_1(x, y)\frac{dx}{ds} + f_2(x, y)\frac{dy}{ds} = 0$, isto é, $(\nabla f)\cdot \mathbf{T} = 0$. O vector gradiente num ponto P de um campo escalar é normal à curva de nível do campo que passa por P, se houver tal curva de nível em P. Uma vez que $\nabla f(x_0, y_0) = f_1(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_2(x_0, y_0)\mathbf{j}$ é normal à recta tangente à curva de nível do campo escalar $z = f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0), a equação da recta tangente é $f_1(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$.

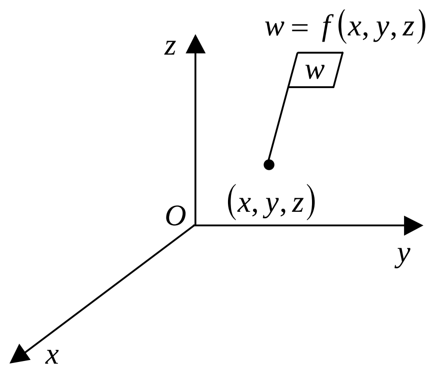


<u>Exemplo</u> – Encontre um vector normal e a equação da recta tangente à curva $2x^2 - 4xy^3 + y^5 = 1$ no ponto $(2,1)$.

A curva pode ser considerada como a curva de nível $f(x, y) = 1$ do campo escalar $z = f(x, y)$ onde $f(x, y) = 2x^2 - 4xy^3 + y^5$. Nesse caso, $f_1(x, y) = 4x - 4y^3$, $f_2(x, y) = -12xy^2 + 5y^4$ e o gradiente de f no ponto $(2,1)$ é dado por $\nabla f(2,1) =$ $= f_1(2,1)\mathbf{i} + f_2(2,1)\mathbf{j} = 4\mathbf{i} - 19\mathbf{j}$. Logo, $4\mathbf{i} - 19\mathbf{j}$ é normal à curva em $(2,1)$. Também, a equação da recta tangente à curva em $(2,1)$ é $4(x - 2) - 19(y - 1) = 0$ ou $4x - 19y + 11 = 0$.

Derivada Direccional e Gradiente no Espaço.

Tal como uma função a duas variáveis pode ser considerada como um campo escalar no plano, uma função f a três variáveis pode ser descrita como um campo escalar no espaço xyz, isto é, podemos pensar em f relacionando-a com o escalar w, dado por $w = f(x,y,z)$ para cada ponto (x,y,z) do seu domínio:



. Como exemplo temos os campos de densidade, temperatura, pressão, volume, potencial eléctrico, etc. Tudo o que vimos para campos escalares no plano xy estende-se naturalmente para campos escalares no espaço xyz. Por exemplo, se $w = f(x,y,z)$, onde f é uma função diferencial, definimos o gradiente de w - ou de f - por $\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\mathbf{k}$ ou $\nabla f(x,y,z) = f_1(x,y,z)\mathbf{i} + f_2(x,y,z)\mathbf{j} +$ $+ f_3(x,y,z)\mathbf{k}$. Se $\mathbf{u}$ é um vector unitário no espaço xyz, é fácil mostrar que a taxa de variação do campo escalar w em relação à distância medida na direcção de $\mathbf{u}$ é dada pela derivada direccional $D_{\mathbf{u}}w = \mathbf{u} \cdot \nabla w$ ou $D_{\mathbf{u}} f(x,y,z) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(x,y,z)$.

Tal como para campos escalares no plano xy, o gradiente de um campo escalar no espaço xyz indica a direcção para a qual a derivada direccional atinge o seu máximo e o seu módulo é numericamente igual a essa derivada máxima.

<u>Exemplo</u> – Encontre a derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2y - yz^3 + z$ no ponto $P = (1,-2,0)$ na direcção do vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

$f_x(x,y,z) = 2xy$, $f_y(x,y,z) = x^2 - z^3$, $f_z(x,y,z) = -3yz^2 + 1$. Então, $\nabla f(x,y,z) =$ $= 2xy\mathbf{i} + (x^2 - z^3)\mathbf{j} + (-3yz^2 + 1)\mathbf{k}$, $\nabla f(1,-2,0) = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{9}} \times$ $\times (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$. Portanto, $D_{\mathbf{u}} f(1,-2,0) = \nabla f(1,-2,0) \cdot \mathbf{u} = (-4)\left(\frac{2}{3}\right) +$ $+ (1)\left(\frac{1}{3}\right) + (1)\left(-\frac{2}{3}\right) = -3$.

Derivada Total.

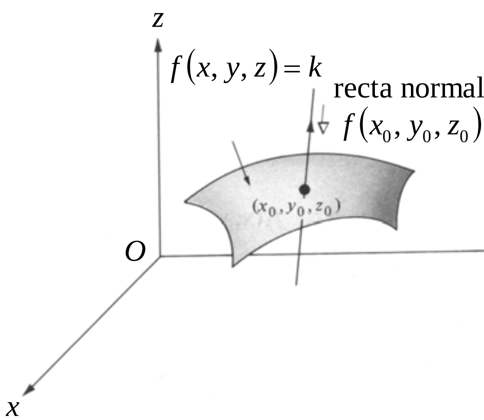
Se a função $z = f(x, y, u, v)$ é tal que as variáveis y, u, v, dependem por sua vez da única variável x: $y = f(x)$; $u = \varphi(x)$; $v = \psi(x)$, ela é, em suma, função duma só variável x; pode-se então, propor calcular a derivada $\frac{dz}{dx}$. Esta derivada pode ser calculada segundo a primeira das fórmulas: $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$, mas como y, u, v não dependem senão de uma só variável x, as derivadas parciais correspondentes são, de facto, derivadas ordinárias; além disso, $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, logo, $\frac{dz}{dx} =$ $= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$. É a fórmula da *derivada total* $\frac{dz}{dx}$ - por oposição à derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Exemplo - $z = x^2 + \sqrt{y}$, $y = \sin x$. Calcule a derivada total.

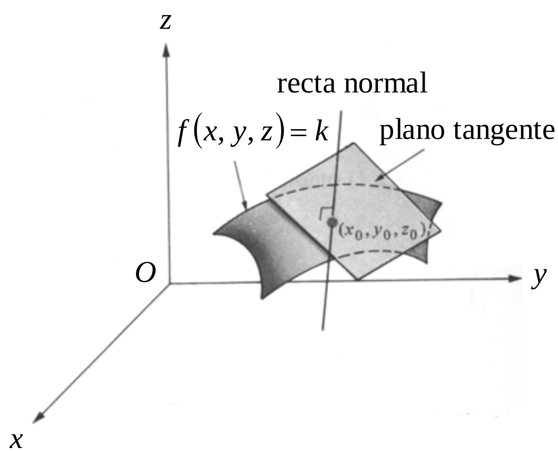
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x = 2x +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x.$$

Superfícies de Nível, Rectas normais e Planos Tangentes.

Seja f uma função diferenciável a três variáves. Se k é uma constante pertence à imagem de f, então o gráfico no espaço xyz da equação $f(x, y, z) = k$ é denominado uma *superfície de nível* para f - ou para o campo escalar $w = f(x, y, z)$ determinado por f. Suponha-se que (x_0, y_0, z_0) é um ponto sobre a superfície de nível, ou seja, $f(x_0, y_0, z_0) = k$, e considere-se que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Definimos então a *recta normal* à superfície de nível, no ponto (x_0, y_0, z_0), como sendo a recta contendo o ponto (x_0, y_0, z_0) e paralela ao vector – já conhecido - gradiente $\nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right)$: Assim, na forma escalar simétrica, a equação da recta normal à superfície de nível $f\left(x, y, z\right) = k$ no ponto $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ é $\frac{x - x_0}{f_1\left(x_0, y_0, z_0\right)} = \frac{y - y_0}{f_2\left(x_0, y_0, z_0\right)} = \frac{z - z_0}{f_3\left(x_0, y_0, z_0\right)}$. O

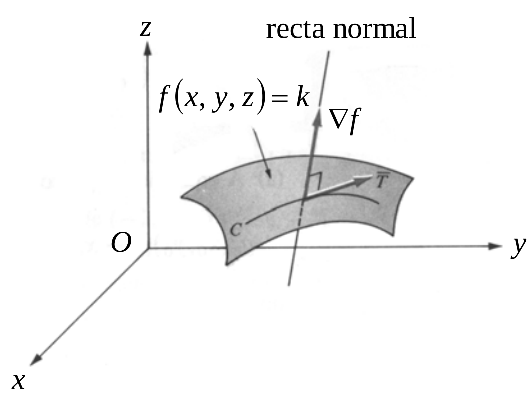


plano contendo o ponto $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ e que é também perpendicular ao vector gradiente $\nabla f\left(x_0, y_0, z_0\right)$ é denominado *plano tangente* à superfície de nível $f\left(x, y, z\right) = k$ no ponto $\left(x_0, y_0, z_0\right)$: . Na forma escalar, a equação do plano tangente à superfície $f\left(x, y, z\right) = k$ em $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ é dada pela expressão que se segue:



$$f_1\left(x_0, y_0, z_0\right)\left(x - x_0\right) + f_2\left(x_0, y_0, z_0\right)\left(y - y_0\right) + f_3\left(x_0, y_0, z_0\right)\left(z - z_0\right) = 0 .$$

Agora, seja C uma curva sobre a superfície $f\left(x, y, z\right) = k$, ou seja, as coordenadas x, y e z de qualquer ponto $P = \left(x, y, z\right)$ de C satisfazem a equação $f\left(x, y, z\right) = k$: .



Usando a regra da cadeia, diferenciamos ambos os lados da última equação em relação ao comprimento de arco s medido ao longo de C para obter $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds} = 0$; isto é, $\nabla f \cdot \mathbf{T} = 0$, onde $\mathbf{T} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$. Portanto, o vector unitário tangente $\mathbf{T}$ à curva C sobre a superfície $f\left(x, y, z\right) = k$ é perpendicular ao vector gradiente ∇f. O plano tangente à superfície

$f(x, y, z) = k$ no ponto P contém o vector tangente a P para toda a curva sobre a superfície que passa por P.

<u>Exemplo</u> – O gráfico de $g(x, y) = 3x^4 y - 7x^3 y - x^2 + y + 1$ no ponto $(1,2,-6)$. Encontre as equações a) do plano tangente e b) da recta normal para a superfície dada no ponto indicado.

$g_1(x, y) = 12x^3 y - 21x^2 y - 2x$ e $g_2(x, y) = 3x^4 - 7x^3 + 1$, daí, $g_1(1,2) = -20$ e $g_2(1,2) = -3$

a) O plano tangente tem equação $z = g(1,2) + g_1(1,2)(x-1) + g_2(1,2)(y-2) =$
$= -6 - 20(x-1) - 3(y-2)$ ou $z = 20 - 20x - 3y$.

b) A recta normal tem equação $\dfrac{x-1}{g_1(1,2)} = \dfrac{y-2}{g_2(1,2)} = \dfrac{z - g(1,2)}{-1}$ ou $\dfrac{x-1}{-20} = \dfrac{y-2}{-3} =$
$= \dfrac{z+6}{-1}$.