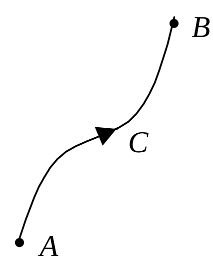
Capítulo III

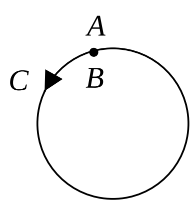
# INTEGRAIS DE LINHA

# Capítulo III

O conceito de *integral de linha* é uma generalização simples e natural do conceito de integral definido: $\int_a^b f(x)dx$. Neste último, integra-se ao longo do eixo dos $x$ de $a$ a $b$ e $f$ é a função definida em cada ponto entre $a$ e $b$. No caso particular de um integral de linha a integração é efectuada ao longo de uma curva $C$ no espaço – ou no plano – e $f$ será a função definida em cada ponto de $C$ - sendo assim seria mais lógica a denominação integral de *curva*, mas integral de linha é o termo que se utiliza. Chama-se a $C$ uma *curva simples* se $C$ tem uma representação $\mathbf{r}(t) =$ $= [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ $(a \le t \le b)$ de modo que $\mathbf{r}(t)$ tem uma derivada $\mathbf{r}'(t) = d\mathbf{r}/dt$, nunca igual a $\mathbf{0}$. Geometricamente, a curva $C$ apresenta uma única tangente em cada um dos seus pontos, cuja direcção varia continuamente à medida que se percorre $C$. Chama-se a $A$: $r(a)$ o *ponto inicial* e a $B$: $r(b)$ o *ponto terminal* de $C$, diz-se que $C$ *está orientada*, chamando-se à direcção de $A$ a $B$ a *direcção positiva* ao longo de $C$, sendo indicada por uma seta:




Quando os pontos $A$ e $B$ coincidem, $C$ é denominada de *curva fechada*, isto é:



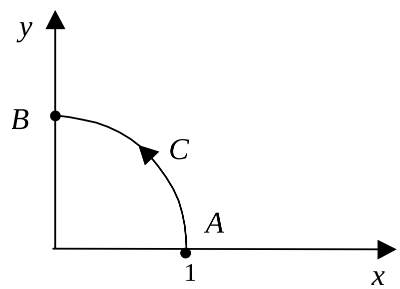

. Assume-se neste capítulo que qualquer percurso de integração de um integral de linha, consiste num conjunto finito de muitas curvas simples.

**Definição e Estudo dos Integrais de Linha.**

Um integral de linha de uma função vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ sobre uma curva $C$ é definida por $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$. Em termos de componentes, com $d\mathbf{r} = [dx, dy, dz]$ e $' = d/dt$ teremos $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \int_a^b (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z')dt$. Se o percurso de integração $C$ for uma curva fechada, em vez de $\int_C$ ter-se-á $\oint_C$.

$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}/dt$ com $t = s$ - o comprimento de arco de $C$ - é a componente tangencial de $\mathbf{F}$, sendo que este integral aparece naturalmente na Mecânica, onde permite calcular o trabalho feito por uma força $\mathbf{F}$ no deslocamento ao longo de $C$. Chama-se a $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ o *integral de trabalho*. Podemos ver que $\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt$ é um integral definido ao longo do intervalo $a \le t \le b$ no eixo $t$ na direcção positiva – a direcção do aumento de $t$. Este integral definido existe para $\mathbf{F}$ contínua e uma curva consistindo um conjunto finito de muitas curvas simples, pois isto torna $\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'$ também contínua.

<u>Exemplo</u> – Encontre o valor do integral da linha $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ quando $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ e $C$ é o arco circular de $A$ a $B$ na figura.




Podemos representar $C$ por $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$. Assim $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, portanto: $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -y(t)\mathbf{i} + x(t)y(t)\mathbf{j} =$ $= -\sin t\mathbf{i} + \cos t \sin t\mathbf{j}$. Diferenciando, $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$. Assim, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} =$

$= \int_0^{\pi/2} (-\sin t\mathbf{i} + \cos t\sin t\mathbf{j})\cdot(-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})dt = \int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 t + \cos^2 t \sin t\right)dt$ e então tem-se que $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt + \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin t\,dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\cos^2 t(-\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} -$ $- \int_0^{\pi/2}(-\cos t)(-2\cos t\sin t)dt$. Teremos que efectuar integração por partes, aplicando a fórmula: $\int u dv = uv - \int v du$.

Se $u = \cos^2 t \Rightarrow du = 2\cos t\cdot(\cos t)' = 2\cos t(-\sin t) = -2\cos t\sin t$,

Se $dv = \sin t dt \Rightarrow v = \int \sin t dt = -\cos t$.

Temos assim o integral $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \left(\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2\dfrac{\pi}{2}\right)-\left(\dfrac{0}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2\times 0\right)-\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} -$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\sin t dt = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\sin\pi+\frac{1}{4}\sin 0-\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\sin t dt = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times$$

$$\times 0-\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt = \frac{\pi}{4}-\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt.$$

Repare-se que $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt = -\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt$, logo $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt =$

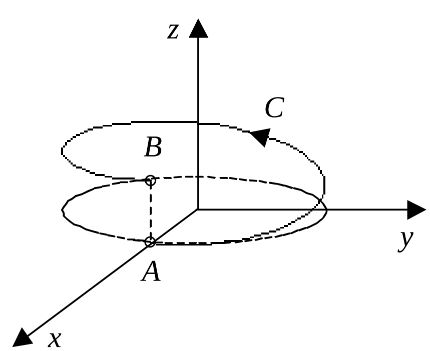
$$= -\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt = -\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt = -\frac{1}{3}\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Então

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{2}-\cos^3 0\right) = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\left(0-1^3\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\approx 1{,}19.$$

Repare-se que neste caso, o desenvolvimento do integral de linha foi feito no *plano*. Levanta-se agora uma questão importante. Será que o valor de $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ depende da escolha da representação do arco circular $C$? A resposta é não, como veremos no teorema.

<u>Exemplo</u> – Para vermos que o método de cálculo dos integrais de linha no espaço é o mesmo que no plano considerado no exemplo anterior, encontre-se o valor de $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ quando $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ e $C$ é a hélice da figura: onde $\mathbf{r}(t)=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$ com $(0\le t\le 2\pi)$.




De $\mathbf{r}(t)=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$ tem-se $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$, $z(t)=3t$. Assim, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = (3t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+\sin t\mathbf{k})\cdot(-\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+3\mathbf{k})$. O produto interno é

$3t(-\sin t)+\cos^2 t+3\sin t$. Então $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\left(-3t\sin t+\cos^2 t+3\sin t\right)dt=$

$=\int_0^{2\pi}-3t\sin t dt+\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt+\int_0^{2\pi}3\sin t dt$. Começemos por integrar por partes o primeiro integral. Se $\int \underbrace{t}_{u}\underbrace{\sin t dt}_{dv}=\int u dv=uv-\int v du$ com $u=t\Rightarrow du=dt$ e $dv=\sin t dt\Rightarrow$

$\Rightarrow v=\int \sin t dt=-\cos t$, então $\int t\sin t dt=t(-\cos t)-\int(-\cos t)dt=-t\cos t+$

$+\int \cos t dt=-t\cos t+\sin t$. Tem-se então que $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=-3\left[-t\cos t+\sin t\right]_0^{2\pi}+$

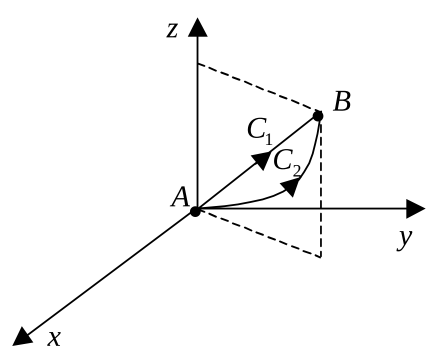
$+\left[\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}+3\left[-\cos t\right]_0^{2\pi}$ ou seja que $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=-3\left[\left[-2\pi\cos 2\pi+\sin 2\pi\right]-\right.$

$\left.-\left[-0\cos 0+\sin 0\right]\right]+\left[\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\times 2\pi\right]-\left[\frac{0}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\times 0\right]-3\left[\cos 2\pi-\cos 0\right]$ ou

$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=-3\left[\left[-2\pi\times 1+0\right]-\left[0+0\right]\right]+\left[\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{4}\times 0\right]-\left[0+\frac{1}{4}\times 0\right]-3\left[1-1\right]=-3(-2\pi)+$
$+\pi+0-0-3\times 0=6\pi+\pi=7\pi\approx 21{,}99$.

Será que o valor $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ altera se integrarmos do mesmo $A$ ao mesmo $B$ como antes, mas ao longo de outro percurso? A resposta é sim, em geral:

<u>Exemplo</u> – Avaliemos o integral de linha $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ com $\mathbf{F}(\mathbf{r})=5z\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+x^2z\mathbf{k}$ ao longo de dois percursos diferentes com o mesmo ponto inicial $A:(0,0,0)$ e o mesmo ponto terminal $B:(1,1,1)$, tal como na figura. Tome-se, nomeadamente,




(a) $C_1$: o segmento de recta $\mathbf{r}_1(t)=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ com $0\le t\le 1$, e

(b) $C_2$: o arco parabólico $\mathbf{r}_2(t)=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$ com $0\le t\le 1$.

(a) Substituindo $\mathbf{r}_1$ em $\mathbf{F}$ obtém-se $\mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t))=5t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$. Precisamos de achar

$\mathbf{r}_1' = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Assim, o integral sobre $C_1$ é $\int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}_1'(t) dt =$

$= \int_0^1 \left(5t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}\right) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) dt = \int_0^1 \left(5t + t^2 + t^3\right) dt = 5\int_0^1 t dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t^3 dt$ isto é,

$$\int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 5\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{12}.$$

(b) Similarmente, substituindo $\mathbf{r}_2$ em $\mathbf{F}$ e calculando $\mathbf{r}_2'$ obtém-se o integral de linha sobre o percurso $C_2$: $\int_{C_{21}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}_2'(t) dt = \int_0^1 \left(5t^2 + t^2 + 2t^5\right) dt =$

$$\frac{5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

Verifica-se que os dois resultados são diferentes, embora os pontos terminais sejam os mesmos. Isto mostra que o valor de um integral de linha será em geral dependente não só de $\mathbf{F}$ mas dos pontos $A$, $B$ do percurso mas também do percurso ao longo do qual se integra de $A$ a $B$.

O trabalho $W$ realizado por uma força constante $\mathbf{F}$ no deslocamento ao longo de um segmento de recta $\mathbf{d}$ é $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$. Isto sugere que se defina o trabalho $W$ realizado por uma força variável $\mathbf{F}$ no deslocamento ao longo de uma curva $C$: $\mathbf{r}(t)$ como o limite dos trabalhos realizados em deslocamentos ao longo de pequenas cordas de $C$, e que se mostre que isto permite definir $W$ pelo integral de linha $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$. Para isso escolhe-se pontos $t_0(=a) < t_1 < \cdots < t_n(=b)$. Então o trabalho $\Delta W_m$ realizado por $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t_m))$ no deslocamento de $\mathbf{r}(t_m)$ a $\mathbf{r}(t_{m+1})$ é $\Delta W_m = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_m)) \cdot [\mathbf{r}(t_{m+1}) - \mathbf{r}(t_m)] \approx$ $\approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_m)) \cdot \mathbf{r}'(t_m) \Delta t_m$ $\quad (\Delta t_m = t_{m+1} - t_m)$. A soma destes $n$ trabalhos é $W_n = \Delta W_0 + \cdots + \Delta W_{n-1}$. Se escolhermos pontos e considerarmos $W_n$ para qualquer $n$ arbitrário mas de modo a que o maior $\Delta t_m$ se aproxime de zero quando $n \to \infty$, então o limite de $W_n$ à medida que $n \to \infty$ existe e é integral de linha $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ desde que $\mathbf{F}$ seja continua e $C$ uma curva constituida por um conjunto finito de curvas simples, o que torna $\mathbf{r}'(t)$ contínua, excepto em muitos pontos – finitos – onde $C$ possua cantos ou pontas.

<u>Exemplo</u> **–** Se $\mathbf{F}$ for uma força, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ representa o trabalho. Seja $t$ o tempo e $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}$, a velocidade. Podemos então escrever $W=\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{v}(t)dt$. Pela segunda Lei de Newton, força = massa$\times$aceleração, $\mathbf{F}=m\mathbf{r}''(t)=m\mathbf{v}'(t)$, onde $m$ é a massa do corpo deslocado. Substituindo em $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ tem-se $W=\int_a^b m\mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}dt=$ $=\int_a^b m\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}\right)' dt=\frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2\Big|_{t=a}^{t=b}$ onde $m|\mathbf{v}|^2/2$ é a energia cinética. Assim o trabalho realizado iguala o ganho em energia cinética. Isto representa uma lei básica em Mecânica.

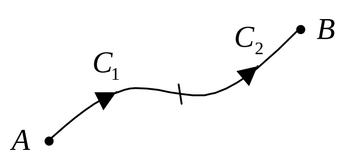
**Propriedades dos Integrais de Linha.**

Das propriedades já familiares dos integrais obtemos as correspondentes fórmulas para os integrais de linha $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$:

/ $\int_C k\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=k\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ($k$ constante),

/ $\int_C (\mathbf{F}+\mathbf{G})\cdot d\mathbf{r}=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r}$ onde a orientação de $C$ é a mesma nos três integrais,

/ $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ onde o percurso $C$ é subdividido em dois arcos $C_1$ e $C_2$ que têm a mesma orientação que $C$: .




Se é suposto que um integral de linha represente quantidades físicas, tal como o trabalho, a escolha de uma ou outra representação de uma dada curva $C$ não deveria ser essencial, desde que as direcções positivas sejam as mesmas em ambos os casos. É isso que é mostrado a seguir:

<u>Teorema</u> **–** Quaisquer representações de $C$ que produzam a mesma direcção positiva em $C$, também permitem obter o mesmo valor do integral de linha $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$.

Demonstração – Representa-se $C$ em $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ usando um outro parâmetro $t^*$ dado por uma função $t=\phi(t^*)$ que tem uma derivada positiva e é tal que $a^* \le t^* \le b^*$ corresponde a $a \le t \le b$. Então, escrevendo $r(\phi(t^*)) = r^*(t^*)$ e usando a regra da cadeia, tem-se $dt^* = (dt^*/dt)dt$ e assim: $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}^*)\cdot d\mathbf{r}^* = \int_{a^*}^{b^*}\left[\mathbf{F}(\mathbf{r}^*(t^*))\cdot \frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*}\right]dt^* =$

$$= \int_{a^*}^{b^*} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi(t^*)))\cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{dt^*}dt^* = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}\,.$$

**Independência do Percurso nos Integrais de Linha.**

O valor de um integral de linha $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1dx + F_2dy + F_3dz)$ ao longo de um percurso $C$ de um ponto $A$ a um ponto $B$ depende em geral, não somente de $A$ a $B$, mas também do percurso $C$ ao longo do qual é efectuada a integração. Já o vimos no terceiro exemplo apresentado, o que levanta a questão da existência de condições para a independência do percurso, de forma a obter-se o mesmo valor de integração de $A$ a $B$ ao longo de qualquer percurso $C$. Este facto tem uma importância prática muito significativa. Por exemplo, na mecânica, independência do percurso pode significar que tem que se realizar o mesmo trabalho, independentemente do tipo de percurso, curto e difícil ou longo e suave, etc. Diz-se que um integral de linha $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ é *independente do percurso num domínio $D$ no espaço* se, para qualquer par de pontos $A, B$ em $D$, o integral tem o mesmo valor para todos os percursos em $D$ que começam em $A$ e terminam em $B$. Um exemplo prático de critérios é por exemplo o seguinte:

Teorema – Um integral de linha $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ com contínuas $F_1, F_2, F_3$ num domínio $D$ no espaço é independente do percurso em $D$ se e somente se $F$ for o gradiente de alguma função $f$ em $D$, $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$; com as componentes $F_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $F_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$, $F_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$.

<u>Demonstração</u> – Seja $\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, f$ definido para uma função $f$ em $D$ e seja $C$ qualquer percurso em $D$ de qualquer ponto $A$ a qualquer ponto $B$, dado por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$. Então de $F_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $F_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $F_3 = \dfrac{\partial f}{\partial z}$ e pela regra da cadeia, tem-se $\int_A^B (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \int_A^B \left( \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f}{\partial z} dz \right) = \int_a^b \dfrac{df}{dt} dt =$ $= f[x(t), y(t), z(t)]\Big|_{t=a}^{t=b} = f(B) - f(A)$. Isto mostra que o valor do integral é simplesmente a diferença dos valores de $f$ nos pontos $A$ e $B$ de $C$ e é, portanto, independente do percurso $C$.

A última fórmula da demonstração $\int_A^B (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = f(B) - f(A)$ com $\mathbf{F} = \mathrm{grad}\, f$ é análoga à fórmula $\int_a^b g(x) dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$ com $G'(x) = g(x)$ utilizada para integrais definidos em Análise e deve ser aplicada sempre que um integral de linha é independente do caminho.

<u>Exemplo</u> – Avalie o integral $I = \int_C (3x^2 dx + 2yz dy + y^2 dz)$ de $A: (0,1,2)$ a $B: (1,-1,7)$ mostrando que $\mathbf{F}$ tem um potencial e aplicando $\int_A^B (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = f(B) - f(A)$.

Se $\mathbf{F}$ tem um potencial $f$, deve ter-se $f_x = F_1 = 3x^2$, $f_y = F_2 = 2yz$, $f_z = F_3 = y^2$. Mostraremos que podemos satisfazer estas condições. Integrando e diferenciando temos $f = x^3 + g(y,z)$, $f_y = g_y = 2yz$, $g = y^2 z + h(z)$, $f_z = y^2 + h' = y^2$, $h' = 0$, $h = 0$. Então $f(x,y,z) = x^3 + y^2 z$ e, através de $\int_A^B (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = f(B) - f(A)$, tem-se $I = f(1,-1,7) - f(0,1,2) = 1 + 7 - (0 + 2) = 6$.