

Capítulo IV

INTEGRAIS MÚLTIPLOS

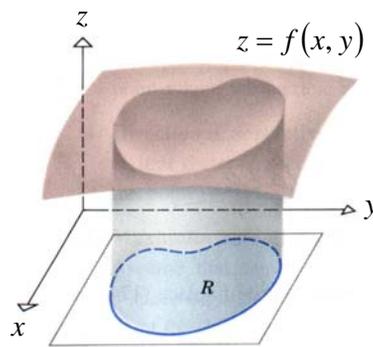
Capítulo IV

A noção de um integral definido pode ser estendida a funções de duas ou mais variáveis. Lembremos que o integral é a função inversa da derivada, isto é, o integral de uma função é uma outra função, cuja derivada é igual à função a integrar: $\int f(x)dx = F(x) + C$ e $F'(x) = f(x)$. C vem por *acréscimo*, ou seja, a derivada de uma constante é zero, logo pelo facto de adicionarmos uma constante C a $F(x)$, $f(x) \left(= (F(x) + C)' \right)$ não é alterada.

Definição de Um Integral Duplo.

Recordemos que o integral definido da função de uma variável $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$ resultou do problema do cálculo de áreas sob curvas. Os integrais de funções de duas variáveis resultam de um problema de volume, que pode ser colocado do seguinte modo:

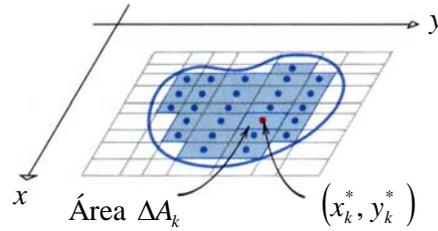
Problema – Encontre o volume de um sólido consistindo em todos os pontos que se encontram entre uma região R : uma superfície $z = f(x, y)$, contínua em R e $f(x, y) \geq 0$ em R . Vamos assumir por região R pode ser encerrada adequadamente grande o lados paralelos aos eixos



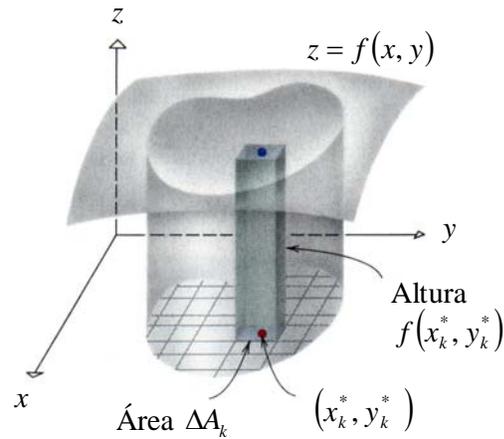
no plano xy e onde f é para todo o (x, y) agora que toda a num rectângulo suficiente com coordenados, o

que assegura que R não se estende infinitamente em qualquer direcção. O processo para encontrar o volume V do sólido da figura é similar ao processo de limitação usado para encontrar áreas, excepto que agora os elementos de aproximação serão paralelepípedos rectangulares em vez de rectângulos. Deve proceder-se de acordo com os seguintes pontos:

- ⌊ Usando linhas paralelas aos eixos coordenados, divide-se o rectângulo que encerra a região R em subrectângulos, e exclui-se desta consideração todos aqueles subrectângulos que contêm quaisquer pontos fora de R , o que deixa apenas rectângulos que são subconjuntos de R : Assuma-se a existência de n rectângulos, e note-se a área do rectângulo de ordem k por ΔA_k .



- ⌊ Escolha-se um ponto arbitrário qualquer em cada subrectângulo, e note-se o ponto no subrectângulo por (x_k^*, y_k^*) . Como se mostra na figura: o produto $f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ é o volume de um paralelepípedo rectangular com área da base ΔA_k e altura $f(x_k^*, y_k^*)$ de forma que a soma $\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$



pode ser vista como uma aproximação ao volume V de todo o sólido.

- ⌊ Existem duas fontes de erro na aproximação: primeiro, os paralelepípedos têm topos planos, enquanto que a superfície $z = f(x, y)$ pode ser curva; segundo, os rectângulos que formam as bases do paralelepípedo não cobrem completamente a região R . No entanto, se repetirmos o processo acima com mais e mais subdivisões de tal modo que os cumprimentos e larguras das bases rectangulares se aproximem de zero, então é plausível que ambos os tipos de erro se aproximem de zero, e o volume exacto do sólido é $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$.

As somas atrás indicadas são chamadas *somas de Riemann* e o limite das somas de

Riemann é definido por $\iint_R f(x, y)dA = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ que é chamado o *integral duplo* de $f(x, y)$ sobre R . Com esta notação, o volume V de um sólido pode ser expresso como $V = \iint_R f(x, y)dA$. Este resultado é conseguido assumindo f

contínua e não negativa na região R . No caso em que $f(x, y)$ pode assumir valores positivos e também negativos em R , o integral duplo sobre R representa a diferença de dois volumes: o volume do sólido acima de R e abaixo de $z = f(x, y)$ menos o volume do sólido abaixo de R e acima de $z = f(x, y)$. Chama-se a esta diferença o *volume de rede* entre $z = f(x, y)$ e R . Assim, um valor positivo para um integral duplo significa que o volume é maior acima de R do que abaixo, um valor negativo significa que o volume é maior abaixo do que acima de R , e um valor nulo significa que os dois volumes são iguais. Observando-se a similaridade entre $\int_a^b f(x)dx$ e

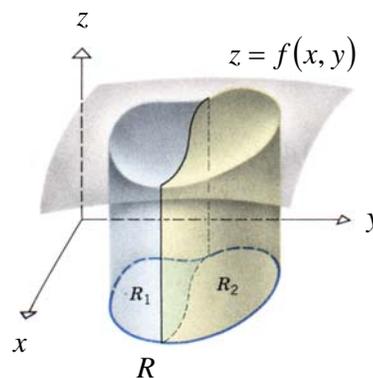
$\iint_R f(x, y)dA$, não é surpreendente que os integrais duplos apresentem muitas das

propriedades dos integrais definidos – a que também chamamos *integrais singulares*:

- $\iint_R Cf(x, y)dA = C \iint_R f(x, y)dA$ ($C = \text{constante}$),
- $\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]dA = \iint_R f(x, y)dA + \iint_R g(x, y)dA$,
- $\iint_R [f(x, y) - g(x, y)]dA = \iint_R f(x, y)dA - \iint_R g(x, y)dA$.

É evidentemente intuitivo que se $f(x, y)$ é não negativo numa região R , então subdividindo R em duas regiões R_1 e R_2 tem o efeito de subdividir o sólido entre R e $z = f(x, y)$ em dois sólidos, a soma dos quais é o volume de todo o sólido: O que sugere o seguinte resultado, mesmo se f assumir valores negativos:

- $\iint_R f(x, y)dA = \iint_{R_1} f(x, y)dA + \iint_{R_2} f(x, y)dA$.



Cálculo de Integrais Duplos.

Excepto em casos muito simples, é impraticável obter o valor de um integral duplo a partir do limite. Vamos ver que o cálculo é muito mais simples se o integral duplo for calculado através de dois integrais singulares sucessivamente. As derivadas parciais

de uma função $f(x, y)$ são calculadas considerando uma das variáveis constante e diferenciando relativamente à outra variável. Consideremos o inverso deste processo, *integração parcial*. A notação $\int_a^b f(x, y)dx$ e $\int_c^d f(x, y)dy$ indica os *integrais definidos parciais*; o primeiro integral, chamado o *integral definido parcial em relação a x* , é calculado considerando y constante e integrando em relação a x , e o segundo integral, chamado o *integral definido parcial em relação a y* , é calculado considerando x constante e integrando em relação a y . Como o exemplo a seguir mostra, o integral definido parcial em relação a x é uma função de y e o integral definido parcial em relação a y é uma função de x .

Exemplo – $\int_0^1 xy^2 dx = y^2 \int_0^1 x dx = \frac{y^2 x^2}{2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{y^2}{2}$ e $\int_0^1 xy^2 dy = x \int_0^1 y^2 dy = \frac{xy^3}{3} \Big|_{y=0}^1 = \frac{x}{3}$.

Um integral definido parcial em relação a x é uma função de y e assim pode ser integrado em relação a y ; similarmente, um integral definido parcial em relação a y pode ser integrado em relação a x . Este processo de iteração de dois estágios é

chamado de *integração iterativa* – ou *repetida*. A notação $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ e $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$ expressa os *integrais iterativos*.

Exemplo - Calcule: a) $\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy) dy dx$ e b) $\int_1^2 \int_0^3 (1+8xy) dx dy$.

a) $\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy) dy dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 (1+8xy) dy \right] dx = \int_0^3 [y + 4xy^2]_{y=1}^2 dx = \int_0^3 [(2+16x) - (1+4x)] dx = \int_0^3 (1+12x) dx = x + 6x^2 \Big|_0^3 = 57$

$$b) \int_1^2 \int_0^3 (1+8xy) dx dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 (1+8xy) dx \right] dy = \int_1^2 [x + 4x^2 y]_{x=0}^3 dy = 3y + 18y^2 \Big|_1^2 = 57$$

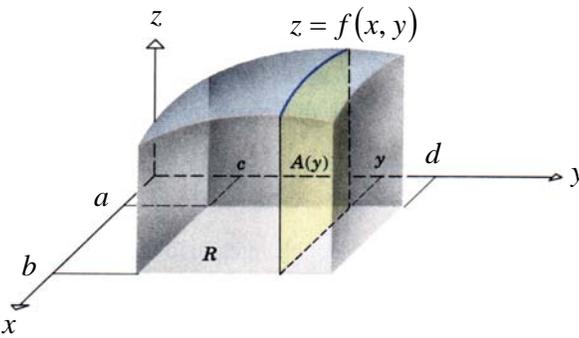
Não é por acaso que os dois integrais iterativos neste último exemplo apresentam o mesmo valor; é uma consequência do seguinte Teorema:

Teorema – Seja R o rectângulo definido pelas inequações $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Se

$$f(x, y) \text{ for contínua neste rectângulo, então } \iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Este importante Teorema permite-nos calcular um integral duplo sobre um rectângulo através do cálculo de um integral iterativo. Para além disso, o Teorema diz que a ordem de integração de um integral iterativo não importa. Não o vamos provar, mas daremos um argumento geométrico para o caso em que $f(x, y)$ é não negativo em R . Neste caso, o integral duplo pode ser interpretado como o volume do sólido S limitado superiormente pela superfície $z = f(x, y)$ e inferiormente pela região R , o que é suficiente para mostrar que os dois integrais iterativos também representam este volume. Para um valor constante de y , a função $f(x, y)$ é uma função de x , e portanto o integral $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ representa a área sob o gráfico desta função de

x . Esta área, mostrada a tracejado na figura, é a área transversal em y de um sólido que se encontra limitado superiormente por $z = f(x, y)$ e inferiormente pela região R : Assim, utilizando um método de



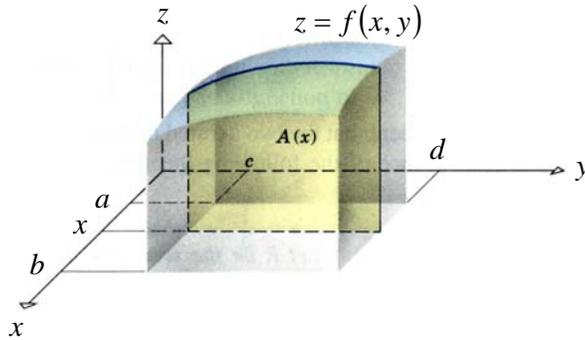
calcular o volume do sólido *cortando-o* em fatias extremamente finas, então o volume

$$\text{é o resultado da soma de todas estas fatias: } \text{Vol}(S) = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy =$$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \text{ Similarmente,}$$

o integral $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$

representa a área da secção transversal de S em x , e do mesmo método das *fatias* vem:



$$\text{Vol}(S) = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \text{ Isto estabelece o resultado}$$

no Teorema anterior para o caso em que $f(x, y)$ é não negativo em R .

Exemplo – Calcule o integral duplo $\iint_R y^2 x dA$ sobre o rectângulo $R = \{(x, y) : -3 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

Devido ao Teorema, o valor do integral duplo pode ser obtido a partir de qualquer dos integrais iterativos $\int_{-3}^2 \int_0^1 y^2 x dy dx$ ou $\int_0^1 \int_{-3}^2 y^2 x dx dy$. Utilizando o primeiro, obtemos

$$\iint_R y^2 x dA = \int_{-3}^2 \int_0^1 y^2 x dy dx = \int_{-3}^2 \left[\frac{1}{3} y^3 x \right]_{y=0}^1 dx = \int_{-3}^2 \frac{1}{3} x dx = \left[\frac{x^2}{6} \right]_{-3}^2 = -\frac{5}{6}.$$

Integrais Duplos Sobre Regiões Não Rectangulares.

Integrais Iterativos com Limites de Integração Não Constantes.

Veremos se os integrais duplos sobre regiões não rectangulares podem frequentemente ser calculados como integrais iterativos dos seguintes

tipos: $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$ e $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$

Vejamos um exemplo que ilustra como calcular tais integrais:

Exemplo – Calcule a) $\int_0^2 \int_{x^2}^x y^2 x dy dx$ e b) $\int_0^{\pi} \int_0^{\cos y} x \sin y dx dy$.

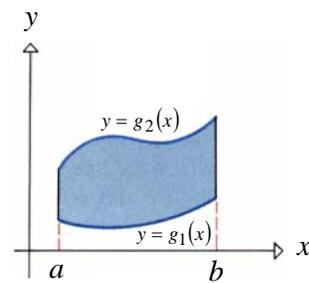
$$\text{a) } \int_0^2 \int_{x^2}^x y^2 x dy dx = \int_0^2 \left[\int_{x^2}^x y^2 x dy \right] dx = \int_0^2 \left[\frac{y^3 x}{3} \right]_{y=x^2}^x dx = \int_0^2 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3} \right) dx = \left[\frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24} \right]_0^2 = \frac{32}{15} - \frac{256}{24} = -\frac{128}{15}$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi} \int_0^{\cos y} x \sin y dx dy = \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\cos y} x \sin y dx \right] dy = \int_0^{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \sin y \right]_{x=0}^{\cos y} dy = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cos^2 y \sin y dy = \left[-\frac{1}{6} \cos^3 y \right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}$$

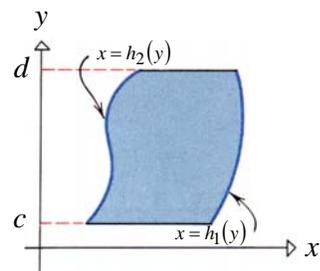
Integrais Duplos Sobre Regiões Não Rectangulares.

As regiões planas podem ser extremamente complexas, e a teoria dos integrais duplos sobre regiões muito gerais não vai ser aqui abordada. Por agora limitar-nos-emos a dois tipos básicos de regiões: tipo I e tipo II, definidos em baixo como se segue:

Definição – a) Uma região de tipo I é limitada à esquerda e à direita por linhas verticais $x = a$ e $x = b$ e é limitada inferiormente e superiormente por curvas contínuas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ onde $g_1(x) \leq g_2(x)$ para $a \leq x \leq b$.



b) Uma região de tipo II é limitada inferiormente e superiormente por curvas horizontais $y = c$ e $y = d$ e é limitada à esquerda e à direita por curvas contínuas $x = h_1(y)$ e $x = h_2(y)$ onde $h_1(y) \leq h_2(y)$ para $c \leq y \leq d$.



O seguinte Teorema permitirá calcular integrais duplos sobre regiões do tipo I e tipo II, utilizando integrais iterativos.

Teorema – a) Se R é uma região do tipo I na qual $f(x, y)$ é contínua, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx .$$

b) Se R é uma região do tipo II na qual $f(x, y)$ é contínua, então

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy .$$

Não provaremos este Teorema, mas para o caso em que $f(x, y)$ é não negativa na região R , pode ser tornado plausível por um argumento geométrico que é similar ao dado no Teorema anterior. Uma vez que $f(x, y)$ é não negativa, o integral duplo pode ser interpretado como o volume do sólido S limitado superiormente pela superfície $z = f(x, y)$ e inferiormente pela região R , o que é suficiente para mostrar que os integrais iterativos também representam este volume. Considere-se o integral iterativo

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \text{ por exemplo. Para um valor constante de } x, \text{ a função}$$

$f(x, y)$ é uma função de y , e assim o integral $A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$ representa a área

sob o gráfico desta função de y entre os pontos $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$. Esta área, mostrada a tracejado na figura:

é a área transversal em x do sólido S , e assim, pelo método das *fatias*, o volume do sólido S

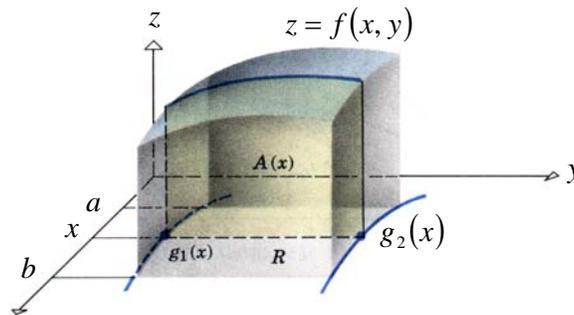
$$\text{é } \text{Vol}(S) = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \text{ o que}$$

mostra que o integral iterativo x

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \text{ é igual ao integral duplo } \iint_R f(x, y) dA . \text{ O mesmo acontece para}$$

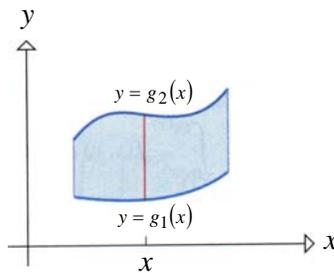
$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy . \text{ Para aplicar o último Teorema é normal começar-se por um esboço}$$

a duas dimensões da região R , não sendo necessário representar graficamente $f(x, y)$. Para uma região do tipo I, os limites de integração na fórmula



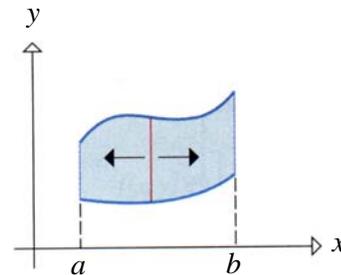
$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$ podem ser obtidos do seguinte modo:

Uma vez que x é considerado constante na primeira integração, desenha-se uma linha vertical num determinado ponto arbitrário x . Esta linha atravessa a fronteira de R duas vezes. O ponto mais baixo de intersecção é na curva $y = g_1(x)$ e o ponto mais alto é na curva $y = g_2(x)$. Estas duas intersecções determinam o limite superior e inferior de y na fórmula.



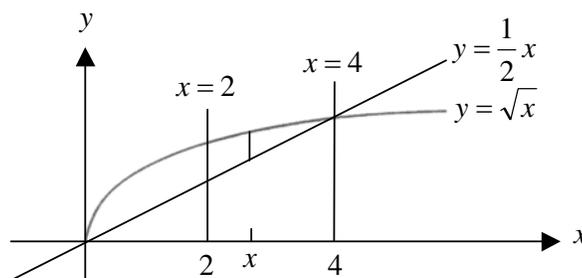
considerado integração, desenha-se uma linha vertical num determinado ponto arbitrário x . Esta linha atravessa a fronteira de R duas vezes. O ponto mais baixo de intersecção é na curva $y = g_1(x)$ e o ponto mais alto é na curva $y = g_2(x)$. Estas duas intersecções determinam o limite superior e inferior de y na fórmula.

Imagine-se a deslocação da linha desenhada anteriormente para a esquerda e depois para a direita. A região mais à esquerda onde a linha intersecta a região R é $x = a$ e a região mais à direita onde a linha intersecta R é $x = b$, o que permite obter os limites de x .



Exemplo – Calcule $\iint_R xy dA$ sobre a região R limitada por $y = \frac{1}{2}x$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ e $x = 4$.

R é considerada uma região do tipo I. A região R e uma linha vertical correspondentes a um determinado x são mostradas na figura. Esta linha encontra a região R em $y = \frac{1}{2}x$ e $y = \sqrt{x}$. Estes são



os limites de integração. Movendo a linha para a esquerda e para a direita obtém-se os

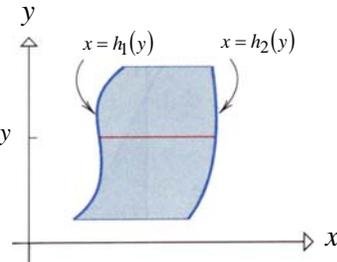
limites de integração $x = 2$ e $x = 4$. Assim, tem-se $\iint_R xy dA = \int_2^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} xy dy dx =$

$$= \int_2^4 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=x/2}^{\sqrt{x}} dx = \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32} \right]_2^4 = \left(\frac{64}{6} - \frac{256}{32} \right) - \left(\frac{8}{6} - \frac{16}{32} \right) = \frac{11}{6}.$$

Se R é uma região do tipo II, então os limites de integração de $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$ pode

ser obtido como se segue:

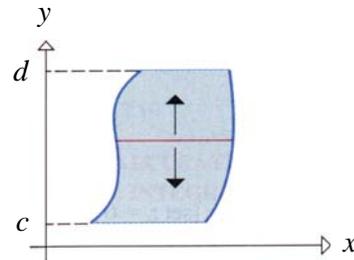
Uma vez que y na primeira uma região R num ponto y :



é considerado constante integração, desenha-se horizontal através da ponto determinado de ponto de intersecção

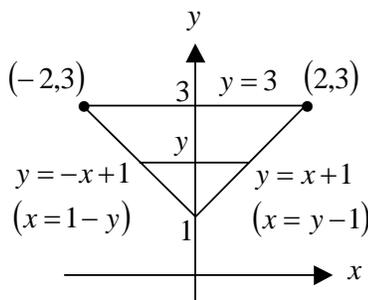
mais à esquerda $x = h_1(y)$ e o ponto mais à direita $x = h_2(y)$ determinam os limites de intersecção do integral.

Se movimentarmos a linha desenhada atrás para baixo e depois para cima encontramos os limites de y do integral.



Exemplo – Calcule $\iint_R (2x - y) dA$ sobre a região triangular entre as linhas $y = -x + 1$, $y = x + 1$ e $y = 3$.

Consideramos R como uma região do tipo II. A região R e uma linha horizontal correspondentes a mostrados na figura: R e a sua fronteira direita em de integração. abaixo e depois para



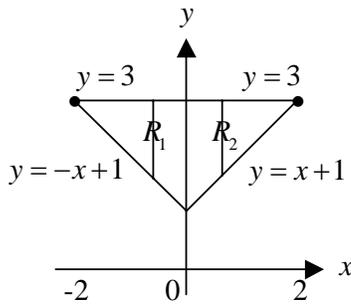
um determinado ponto y são . Esta linha encontra a região esquerda em $x = 1 - y$ e a sua $x = y - 1$. Estes são os limites Movendo esta linha para cima vêm os limites de y ,

$y = 1$ e $y = 3$. Assim, $\iint_R (2x - y^2) dA = \int_{y=1}^3 \int_{x=1-y}^{y-1} (2x - y^2) dx dy = \int_1^3 [x^2 - y^2 x]_{x=1-y}^{y-1} dy =$

$$\int_1^3 [(1-2y+2y^2-y^3)-(1-2y+y^3)]dy = \int_1^3 (2y^2-2y^3)dy = \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{2} \right]_1^3 = -\frac{68}{3}.$$

Neste último problema poderíamos ter tratado R como uma região do tipo I, mas com um problema adicional. Vista como uma região de tipo I, a fronteira superior de R é a linha $y = 3$:

duas partes, a origem e a Para levar a decompor a como se vê na



e a fronteira inferior consiste em linha $y = -x + 1$ à esquerda da linha $y = x + 1$ à direita da origem. Para levar a cabo a integração é necessário região R em duas partes, R_1 e R_2 , figura, escrevendo-se então

$$\iint_R (2x - y^2) dA = \iint_{R_1} (2x - y^2) dA + \iint_{R_2} (2x - y^2) dA = \int_{-2}^0 \int_{-x+1}^3 (2x - y^2) dy dx + \int_0^2 \int_{x+1}^3 (2x - y^2) dy dx$$

o que produz o mesmo resultado já obtido: $-\frac{68}{3}$.

Inversão da Ordem de Integração.

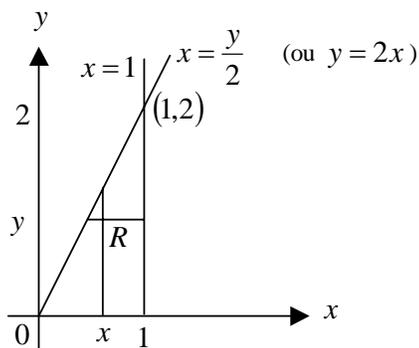
Por vezes o cálculo de um integral iterativo pode ser simplificado por *inversão* da ordem de integração. O exemplo que se segue indica como fazê-lo.

Exemplo – Uma vez que não existe antiderivada elementar de e^{x^2} , o integral

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy$$

não pode ser calculado executando a integração em ordem a x em primeiro lugar. Calcular-se-á este integral expressando-o como um integral iterativo equivalente com ordem de integração invertida.

Para a integração x varia desde à linha $x = 1$: varia de 0 a 2, dado igual a um triangular R na de integração,



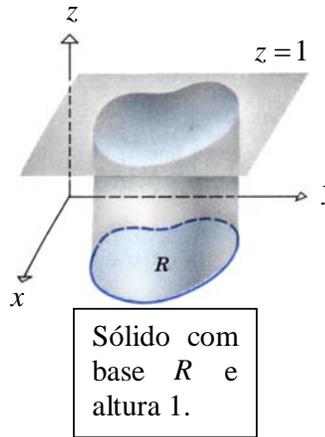
interior, y é constante e a linha $x = y/2$ até . Para a integração exterior, y sendo o integral iterativo integral duplo sobre a região figura. Para inverter a ordem trata-se R como uma região

de tipo I, o que nos permite escrever o integral dado como

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy = \iint_R e^{x^2} dA = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} dy dx = \int_0^1 [e^{x^2} y]_{y=0}^{2x} dx = \int_0^1 2xe^{x^2} dx = [e^{x^2}]_0^1 = e - 1$$

Cálculo de Áreas sob a Forma de Um Integral Duplo.

Embora os integrais duplos apareçam no contexto do cálculo de volumes, podem também ser utilizados para o cálculo deste propósito, considera-se consiste nos pontos entre o plano região R no plano xy : deste sólido é $V = \iint_R 1 dA = \iint_R dA$. No tem secções transversais paralelas ao modo que $V = \text{área da base} \cdot \text{altura} = \text{área de } R$. Tem-se assim a fórmula

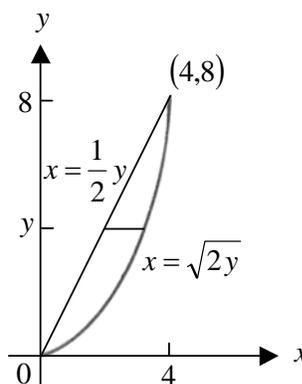
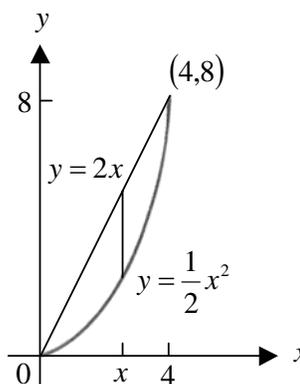


de áreas. Para que o sólido $z=1$ e uma . O volume entanto, o sólido plano xy , de $= \text{área de } R \cdot 1 = V = \iint_R dA$. Esta

fórmula é por vezes confusa pois equaciona uma área e um volume. Esta fórmula pretende equacionar somente os valores numéricos da área e volume e não as unidades que, evidentemente, devem ser diferentes.

Exemplo – Utilize um integral duplo para encontrar a área da região R limitada pela parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ e a linha $y = 2x$.

A região R pode ser tratada igualmente como de tipo I ou tipo II, como se pode observar respectivamente nas figuras ao lado. Tratando a região R como tipo I resulta Área de $R = \iint_R dA =$



$$= \int_0^4 \int_{x^2/2}^{2x} dy dx = \int_0^4 [y]_{y=x^2/2}^{2x} dx = \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{6} \right]_0^4 = 16/3. \text{ Tratando } R \text{ como}$$

uma região de tipo II resulta Área de $R = \iint_R dA = \int_0^8 \int_{y/2}^{\sqrt{2y}} dx dy = \int_0^8 [x]_{x=y/2}^{\sqrt{2y}} dy =$

$$= \int_0^8 \left(\sqrt{2y} - \frac{1}{2}y \right) dy = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} y^{3/2} - \frac{y^2}{4} \right]_0^8 = 16/3.$$

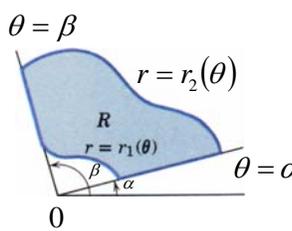
Integrais Duplos em Coordenadas Polares.

Alguns problemas de integração dupla são mais facilmente resolvidos se o integrando e a região de integração forem expressos em coordenadas polares. Este é frequentemente o caso quando a região de integração tem a forma descrita na seguinte definição.

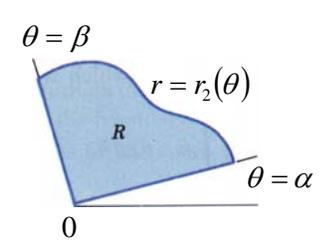
Definição – Uma *região polar simples* é uma região – em coordenadas polares – compreendida entre dois ângulos $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e duas curvas contínuas polares $r = r_1(\theta)$ e $r = r_2(\theta)$, onde:

- i). $\alpha \leq \beta$ e $\beta - \alpha \leq 2\pi$;
- ii). $0 \leq r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$.

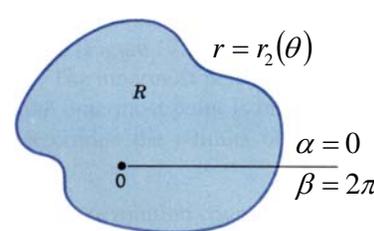
A figura seguinte: mostra o caso típico onde $r_1(\theta)$ é igual a forma que a fronteira



mostra uma região polar especial zero, de interior



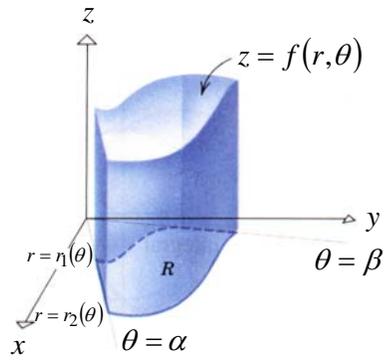
é reduzida a um único ponto - a origem – e a próxima figura mostra o caso igualmente igual a zero $\beta = 2\pi$, de forma que coincidem. O conceito coordenadas polares



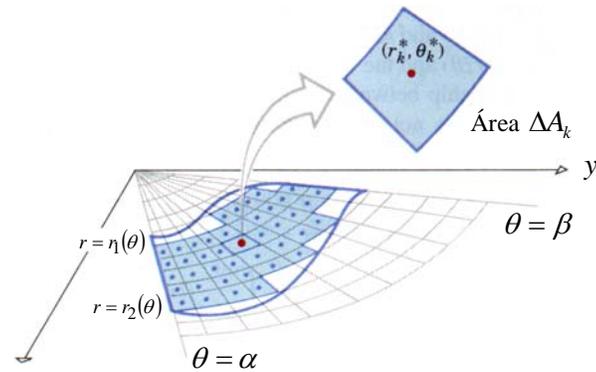
especial em que $r_1(\theta)$ é e os ângulos são $\alpha = 0$ e as fronteiras laterais de um integral duplo em pode ser motivado pelo

seguinte problema de volume:

Problema – Encontre o volume do sólido que consiste em todos os pontos que ficam entre uma região polar simples R no plano xy e uma superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é $z = f(r, \theta)$, onde f é contínua em R e $f(r, \theta) \geq 0$ para todo o (r, θ) em R : Para encontrar o volume V do sólido nesta figura,



utilizar-se-á um processo de limites similar ao inicial, excepto que usaremos arcos circulares e ângulos para subdividir a região R em blocos, chamados *rectângulos polares*. Como se mostra na figura em baixo, exclui-se da consideração todas as coordenadas rectangulares que contêm pontos fora de R , deixando apenas coordenadas polares que são subconjuntos de R . Assume-se que existem n rectângulos polares como estes e nota-se a área do rectângulo polar de ordem k por ΔA_k . Seja



(r_k^*, θ_k^*) um qualquer ponto neste rectângulo polar. Como se mostra na figura:

o produto $f(r_k^*, \theta_k^*) \Delta A_k$ é o volume de um sólido com área de base ΔA_k e altura $f(r_k^*, \theta_k^*)$,

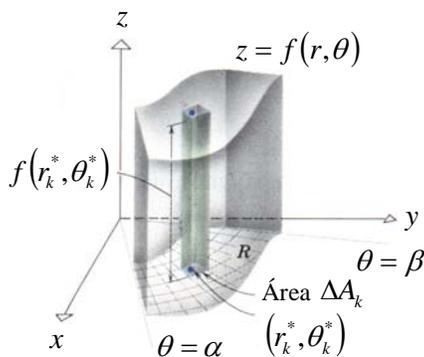
de forma que a soma $\sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*) \Delta A_k$ pode ser

vista como uma aproximação ao volume V de todo o sólido. Se agora aumentarmos o número de subdivisões de tal modo que as dimensões dos rectângulos polares se aproximem de zero,

então parece plausível que os erros nas aproximações se aproximem de zero, e o

volume exacto do sólido é $V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*) \Delta A_k$. As somas nesta equação são

chamadas *somas polares de Riemann*, e o limite é chamado um *integral duplo polar*

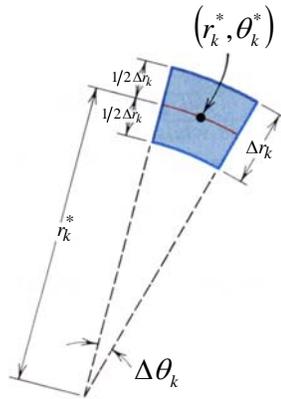


que é notado por $\iint_R f(r, \theta) dA = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*) \Delta A_k$, portanto o volume V do sólido pode ser expresso por $V = \iint_R f(r, \theta) dA$.

Para fins computacionais é útil expressar o integral duplo polar $\iint_R f(r, \theta) dA$ como um

integral iterativo. Para este fim, escolhe-se o ponto arbitrário (r_k^*, θ_k^*) em $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*) \Delta A_k$ como centro do rectângulo polar de ordem k como se

mostra na figura
rectângulo polar
espessura radial
rectângulo polar
Tratando a área
a diferença na
fórmula para



. Suponhamos também que este tem um ângulo central $\Delta\theta_k$ e uma Δr_k . Então, o raio interior deste é $r_k^* - \frac{1}{2} \Delta r_k$ e o raio exterior é $r_k^* + \frac{1}{2} \Delta r_k$.

ΔA_k deste rectângulo polar como área de dois sectores, obtém-se uma a área $\Delta A_k = \frac{1}{2} \left(r_k^* + \frac{1}{2} \Delta r_k \right)^2 \Delta\theta_k -$

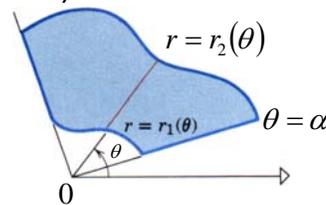
$-\frac{1}{2} \left(r_k^* - \frac{1}{2} \Delta r_k \right)^2 \Delta\theta_k$, que é equivalente a ter $\Delta A_k = r_k^* \Delta r_k \Delta\theta_k$. Assim, vem, de cima,

$$V = \iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$$

no qual os limites de integração são escolhidos

para cobrir a região R , isto é, com θ entre α e β , o valor de r varia de $r_1(\theta)$ a $r_2(\theta)$:

quer positivos,
integral duplo
de rede entre
o volume do
de $z = f(r, \theta)$ e o volume do sólido que se encontra abaixo de R mas acima de $z = f(r, \theta)$. A relação entre o integral duplo polar e o integral iterativo



. Se $f(r, \theta)$ puder assumir valores quer negativos em R , então o polar sobre R representa o *volume* $z = f(r, \theta)$, isto é, a diferença entre sólido acima de R mas abaixo

em $V = \iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$ mantém-se mesmo se $f(r, \theta)$ não é

positivo em R .

Teorema – Se R é uma região do tipo mostrado nas três primeiras figuras de regiões

polares, e se $f(r, \theta)$ é contínua em R , então
$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta.$$

Os integrais polares satisfazem as propriedades:

- $\iint_R C f(r, \theta) dA = C \iint_R f(r, \theta) dA$ ($C = \text{constante}$),
- $\iint_R [f(r, \theta) + g(r, \theta)] dA = \iint_R f(r, \theta) dA + \iint_R g(r, \theta) dA,$
- $\iint_R [f(r, \theta) - g(r, \theta)] dA = \iint_R f(r, \theta) dA - \iint_R g(r, \theta) dA$ e
- $\iint_R f(r, \theta) dA = \iint_{R_1} f(r, \theta) dA + \iint_{R_2} f(r, \theta) dA$ já mencionadas atrás nos integrais duplos *normais*.

Para aplicar o Teorema, começamos com um esboço da região R . Assim, os limites de integração podem ser obtidos do seguinte modo:

1º. Uma vez que θ é constante para a primeira integração, desenha-se uma linha radial desde a origem através da região R com um ângulo determinado θ , como podemos ver na figura anterior. Esta linha atravessa a fronteira de R no máximo duas vezes. O ponto mais interior da intersecção é na curva $r = r_1(\theta)$ e o ponto mais exterior é na curva $r = r_2(\theta)$. Estas intersecções determinam os limites r de

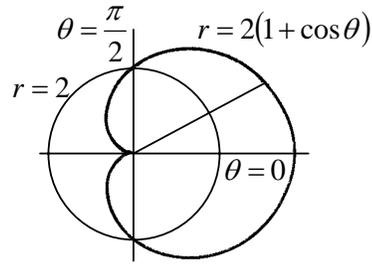
integração em
$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta.$$

2º. Imagine-se que se roda um raio ao longo do eixo polar x no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio em relação à origem. O ângulo mais pequeno ao qual este raio intersecta a região R é $\theta = \alpha$ e o maior ângulo é $\theta = \beta$. Isto permite obter os limites de integração θ .

Exemplo – Calcule $\iint_R \sin \theta dA$, onde R é a região no primeiro quadrante que fica fora do círculo $r = 2$ e dentro do cardióide $r = 2(1 + \cos \theta)$.

A região R é esboçada na figura ao lado. Seguindo os dois passos indicados em cima podemos obter

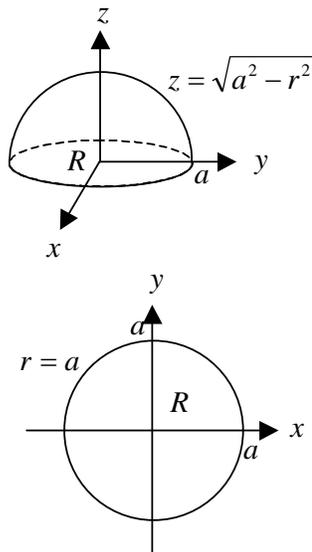
$$\iint_R \sin \theta dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^{2(1+\cos \theta)} (\sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \Big|_{r=2}^{2(1+\cos \theta)} d\theta,$$



isto é,
$$\iint_R \sin \theta dA = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(1+\cos \theta)^2 \sin \theta - \sin \theta \right] d\theta =$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{3} (1+\cos \theta)^3 + \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{3} \right) \right] = \frac{8}{3}.$$

Exemplo – Em coordenadas cilíndricas, a equação $r^2 + z^2 = a^2$ representa uma esfera de raio a centrado na origem. Trata-se da esfera cuja equação em coordenadas retangulares é $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Utilize um integral duplo polar para calcular o volume desta esfera.



Em coordenadas cilíndricas o hemisfério superior é dado pela equação $z = \sqrt{a^2 - r^2}$, portanto o volume limitado por toda a esfera é $V = 2 \iint_R \sqrt{a^2 - r^2} dA$ onde R é a região

circular mostrada na figura. Assim, $V = 2 \iint_R \sqrt{a^2 - r^2} dA =$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} (2r) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^a d\theta \text{ e assim}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} a^3 d\theta = \left[\frac{2}{3} a^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

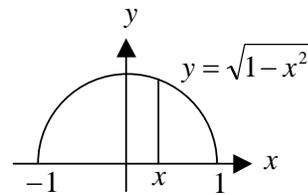
O argumento atrás utilizado para deduzir a fórmula área de $R = \iint_R dA$ também se aplica aos integrais duplos polares.

Conversão de Integrais Duplos de Coordenadas Rectangulares em Polares.

Os integrais duplos polares são por vezes chamados *integrais duplos em coordenadas polares* em contraste com os integrais duplos atrás estudados que são chamados *integrais duplos em coordenadas rectangulares*. Por vezes um integral duplo que é difícil de calcular em coordenadas rectangulares pode ser calculado mais facilmente efectuando a substituição $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ para o converter num integral em coordenadas polares. Sendo assim, os integrais rectangulares e polares podem ser relacionados pela equação $\iint_R f(x, y) dA = \iint_{\text{limites apropriados}} f(r, \theta) r dr d\theta$.

Exemplo – Use coordenadas polares para calcular $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dy dx$.

O primeiro passo consiste em expressar o integral iterativo como um integral duplo em coordenadas rectangulares. Para x constante, a integração de y é efectuada desde a fronteira mais baixa $y = 0$ até ao semicírculo $y = \sqrt{1-x^2}$. x pode variar de -1 à esquerda até $+1$ à direita, portanto a região de integração R para o integral duplo é mostrado na figura. Em coordenadas polares, esta



é a região varrida à medida que r varia entre 0 e π . Assim, $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dy dx =$

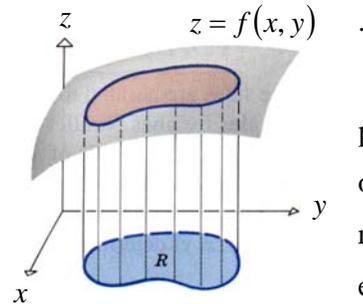
$$= \iint_R (x^2 + y^2)^{3/2} dA = \int_0^{\pi} \int_0^1 (r^3) r dr d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{5} d\theta = \frac{\pi}{5}.$$

Área Superficial.

O primeiro problema de área aqui considerado pode ser colocado do seguinte modo:

Problema – Seja f uma função definida numa região fechada R no plano xy . Encontre a área superficial da parte da superfície $z = f(x, y)$ cuja projecção no plano

xy é a região R :

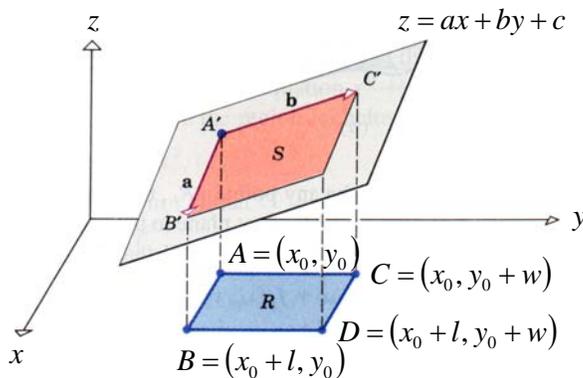


Resolveremos este resolvendo-o para é um plano e a usando o caso geral.

problema por passos, primeiro o caso especial em que a superfície região R é um rectângulo, depois especial para resolver o problema

Teorema – Seja R uma região rectangular fechada no plano xy com lados paralelos aos eixos coordenados. Se os comprimentos dos lados são l e w , então a área superficial da porção do plano $z = ax + by + c$ que é projectada na região R é dada por $S = \sqrt{a^2 + b^2 + 1}lw$.

Demonstração – Suponha-se que os quatro cantos de R são $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_0 + l, y_0)$, $C = (x_0, y_0 + w)$, $D = (x_0 + l, y_0 + w)$ do qual se segue que os pontos no plano $z = ax + by + c$ que se projectam em A , B e C são $A' = (x_0, y_0, ax_0 + by_0 + c)$, $B' = (x_0 + l, y_0, a(x_0 + l) + by_0 + c)$ e ainda $C' = (x_0, y_0 + w, ax_0 + b(y_0 + w) + c)$. Estes pontos determinam um paralelogramo:



com lados $\mathbf{a} = \mathbf{A'B'} = l\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + a\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{A'C'} = 0\mathbf{i} + w\mathbf{j} + bw\mathbf{k}$, que constitui a parte do plano que é projectada na região R . O produto externo destes vectores é $\mathbf{a} \times \mathbf{b} =$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l & 0 & al \\ 0 & w & bw \end{vmatrix} = -alw\mathbf{i} - lbw\mathbf{j} + lw\mathbf{k}$$

e assim da fórmula $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta = \text{Área}$, a área S do paralelogramo determinado por \mathbf{a} e \mathbf{b} é $S = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{(-alw)^2 + (-lbw)^2 + (lw)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 1}lw$.

Mostraremos agora como o Teorema acima pode ser usado para deduzir o seguinte resultado mais geral:

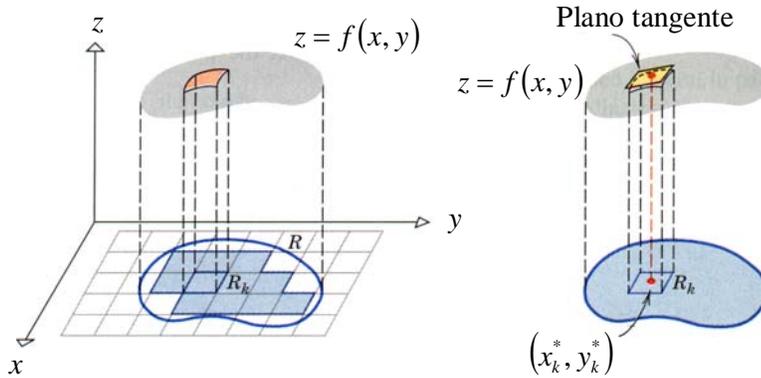
Fórmula da Área Superficial.

Se f tem primeiras derivadas parciais contínuas numa região fechada R do plano xy , então a área S dessa parte da superfície $z = f(x, y)$ que é projectada em R é

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA.$$

Para chegarmos a esta fórmula, usaremos um processo de limitação agora já familiar:

⇒ Como se mostra na figura: limitemos R dentro de um rectângulo cujos lados são paralelos aos eixos x e y , e



subdividamos o rectângulo em rectângulos mais pequenos através de linhas paralelas a estes eixos. Excluamos desta consideração todos os rectângulos que contêm pontos fora de R , deixando somente rectângulos que são subconjuntos de R . Assuma-se que existem n rectângulos como estes e note-se o rectângulo de ordem k por R_k . Suponha-se que os lados de R_k têm dimensões Δx_k e Δy_k , e seja ΔS_k a área do retalho na superfície $z = f(x, y)$ determinada pela projecção de R_k nesta superfície.

⇒ Se (x_k^*, y_k^*) for um ponto de R_k , então a área ΔS_k pode ser aproximada pela área da parte do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ em (x_k^*, y_k^*) que é projectada em R_k . Este plano tangente tem uma equação da forma $z = f_x(x_k^*, y_k^*)x + f_y(x_k^*, y_k^*)y + c$ para uma constante apropriada c , e assim do

último Teorema vem: $\Delta S_k = \sqrt{f_x(x_k^*, y_k^*)^2 + f_y(x_k^*, y_k^*)^2 + 1} \Delta x_k \Delta y_k$. Assim, se fizermos $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ e adicionarmos as áreas dos retalhos, obtemos a seguinte

aproximação a toda a área de S :
$$S \approx \sum_{k=1}^n \sqrt{f_x(x_k^*, y_k^*)^2 + f_y(x_k^*, y_k^*)^2 + 1} \Delta A_k.$$

⇒ Existem duas fontes de erro nesta aproximação, uma resultando do facto de os rectângulos R_1, R_2, \dots, R_n não preencherem completamente a região R , e a outra resultando do facto dos retalhos na superfície terem sido aproximados por áreas nos planos tangentes. No entanto, parece plausível que se repetirmos o processo de subdivisão usando mais e mais rectângulos com dimensões que se aproximem de zero, então os erros diminuirão e a área de superfície exacta será dada por

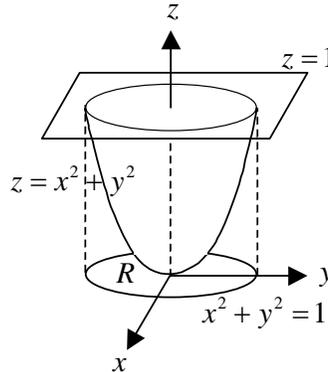
$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{f_x(x_k^*, y_k^*)^2 + f_y(x_k^*, y_k^*)^2 + 1} \Delta A_k = \iint_R \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1} dA \text{ que é}$$

simplesmente a fórmula $S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$ com uma notação diferente para as derivadas parciais.

Exemplo – Encontre a área superficial da parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 1$.

A superfície é mostrada na figura:

$z = 1$ e $z = x^2 + y^2$ podemos ver parabolóide se intersectam projecção no plano xy $x^2 + y^2 = 1$. Consequentemente, a procuramos é projectada na por este círculo. Uma vez que a



. Das equações, que o plano e o num círculo cuja tem a equação superfície cuja área região R limitada superfície tem a

equação $z = x^2 + y^2$ temos que $S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA = \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dA$.

Este integral é mais facilmente calculado em coordenadas polares. Substituindo

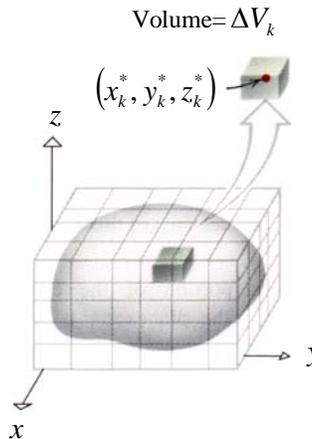
$x^2 + y^2$ por r^2 e substituindo $rdrd\theta$ para dA tem-se $S = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta =$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_{r=0}^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1) d\theta = \frac{1}{6} \pi (5\sqrt{5} - 1).$$

Integrais Triplos.

Enquanto que um integral duplo de uma função $f(x, y)$ é definido sobre uma região fechada R no plano xy , um *integral triplo* de uma função $f(x, y, z)$ é definido sobre uma região sólida fechada tri-dimensional G . Para assegurar que G não se estende indefinidamente em qualquer direcção, assumiremos que G pode ficar enquadrada dentro de uma caixa adequadamente grande – paralelepípedo rectangular com lados paralelos aos planos coordenados:

integral triplo de $f(x, y, z)$ primeiro a caixa em n subcaixas aos planos coordenados. Depois subcaixas que contêm quaisquer escolhe-se um ponto arbitrário em restantes subcaixas. Como se vê o volume da restante subcaixa de



. Para definir o sobre G , divide-se por planos paralelos excluimos aquelas pontos fora de G e cada uma das na figura, nota-se o ordem k por ΔV_k de ordem k por

(x_k^*, y_k^*, z_k^*) . Depois, formamos o produto $f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$ para cada subcaixa, e calcula-se o somatório dos produtos para todas as subcaixas para obter *as somas de*

Riemann: $\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$. Finalmente, repete-se o processo com mais e mais

subdivisões de tal modo que o comprimento, largura e altura de cada subcaixa se aproxima de zero, e n se aproxima de $+\infty$. O limite $\iiint_G f(x, y, z)dV =$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$ é chamado o integral triplo de $f(x, y, z)$ sobre a região G .

As condições para as quais o integral triplo existe são estudadas em *Ánálise* mais avançada. Para nós é suficiente saber que esta existência é assegurada para f contínua em G , sendo G uma região demasiado complexa.

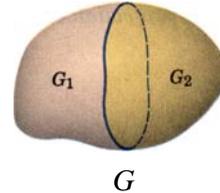
Propriedades dos Integrais Triplos.

Os integrais triplos gozam de muitas propriedades dos integrais simples e duplos:

- $\iiint_G Cf(x, y, z)dV = C \iiint_G f(x, y, z)dV$ ($C = \text{constante}$),
- $\iiint_G [f(x, y, z) + g(x, y, z)]dV = \iiint_G f(x, y, z)dV + \iiint_G g(x, y, z)dV$,
- $\iiint_G [f(x, y, z) - g(x, y, z)]dV = \iiint_G f(x, y, z)dV - \iiint_G g(x, y, z)dV$.

Além disto, se a região G for subdividida em duas subregiões G_1 e G_2 , então:

- $\iiint_G f(x, y, z)dV = \iiint_{G_1} f(x, y, z)dV + \iiint_{G_2} f(x, y, z)dV$.



Cálculo de Integrais Triplos.

Do mesmo modo que um integral duplo pode ser calculado através de duas integrações sucessivas simples, também um integral triplo pode ser calculado através de três integrações sucessivas. O seguinte Teorema é análogo ao Teorema apresentado para integrais duplos:

Teorema – Seja G a caixa rectangular definida pelas inequações $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $k \leq z \leq l$. Se f for contínua na região G , então $\iiint_G f(x, y, z)dV =$

$$= \int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x, y, z) dz dy dx .$$

Para além disto, o integral iterativo à direita pode ser substituído por qualquer um dos outros cinco integrais iterativos que resultam da alteração da ordem de integração.

Exemplo – Calcule o integral triplo $\iiint_G 12xy^2z^3dV$ sobre a caixa rectangular G

definida pelas inequações $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 2$.

Dos seis possíveis integrais iterativos que poderíamos usar, escolheremos

$$\int_{-1}^2 \int_0^3 \int_0^2 12xy^2z^3 dz dy dx .$$

Assim, integraremos primeiro em relação a z , depois em relação a y , considerando x

considerando x e y constantes, depois em relação a y , considerando x

constante, e finalmente em relação a x .

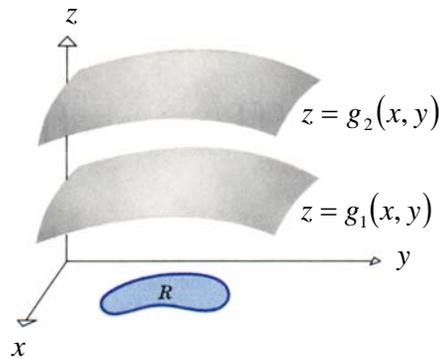
$$\iiint_G 12xy^2z^3 dV = \int_{-1}^2 \int_0^3 \int_0^2 12xy^2z^3 dz dy dx =$$

$$= \int_{-1}^2 \int_0^3 [3xy^2z^4]_{z=0}^2 dy dx = \int_{-1}^2 \int_0^3 48xy^2 dy dx = \int_{-1}^2 [16xy^3]_{y=0}^3 dx = \int_{-1}^2 432x dx = 216x^2 \Big|_{-1}^2 = 648.$$

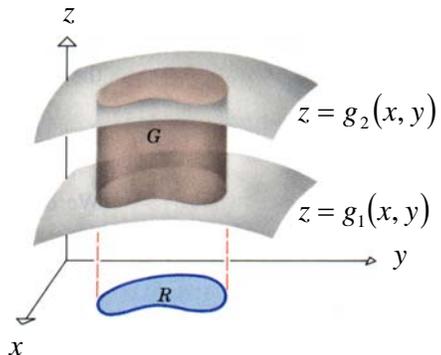
Cálculo de Integrais Triplos Sobre Regiões Mais Gerais.

Além das regiões rectangulares, existem outro tipo de regiões que interessam. Por simplicidade restringiremos a nossa discussão a regiões sólidas construídas do modo que se segue:

Seja R uma região fechada no plano xy : e sejam $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ funções contínuas tal que $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$ para todos os pontos (x, y) em R . Geometricamente, esta condição condiciona a superfície $z = g_2(x, y)$ a não mergulhar abaixo da superfície $z = g_1(x, y)$ sobre R . Chamaremos $z = g_1(x, y)$ a *superfície inferior* e $z = g_2(x, y)$ a *superfície superior*. Seja G o sólido consistindo em todos



os pontos acima ou abaixo da região R : que fica entre a superfície superior e a superfície inferior. Um sólido G construído deste modo será denominado *sólido simples*, e a região R será chamada a *projecção* de G no plano xy . O seguinte Teorema permitir-nos-á calcular integrais triplos sobre sólidos simples.



Teorema – Seja G um sólido simples com superfície superior $z = g_2(x, y)$ e superfície inferior $z = g_1(x, y)$, e seja R a projecção de G no plano xy . Se $f(x, y, z)$

for contínua em G , então

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA.$$

Neste integral, a primeira integração é efectuada em relação a z , após o que resta uma função de x e y . Esta função de x e y é então integrada sobre a região R no plano xy . Para aplicar este integral é usual começar com um esboço tri-dimensional do sólido G , do qual os limites de integração podem ser obtidos como se segue:

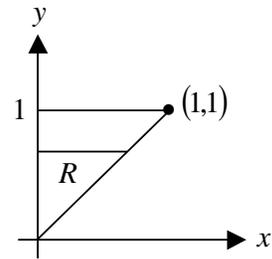
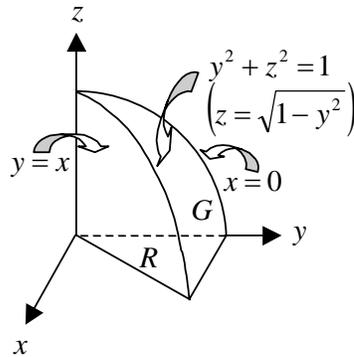
1^ª. Encontra-se uma equação $z = g_2(x, y)$ para a superfície superior e uma equação $z = g_1(x, y)$ para a superfície inferior de G . As funções $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ determinam os limites de integração inferiores e superiores de z ;

2^ª. Faz-se um esboço a duas dimensões da projecção de R do sólido no plano xy . Deste esboço podem determinar-se os limites de integração do integral duplo

$$\text{sobre } R \text{ em } \iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dA.$$

Exemplo – Seja G uma cunha do primeiro octante cortada da forma cilíndrica $y^2 + z^2 \leq 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 0$. Calcule $\iiint_G z dV$.

O sólido G e a sua projecção R no plano xy são mostrados na figura: A superfície superior do sólido é formada pelo cilindro e a superfície inferior pelo plano xy . Uma vez que $y^2 + z^2 = 1$ que fica acima do



equação $z = \sqrt{1 - y^2}$, e o plano xy tem a equação $z = 0$, segue-se de

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dA \text{ que } \iiint_G z dV = \iint_R \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} z dz \right] dA. \text{ Para o integral}$$

duplo sobre R , as integrações de x e y podem ser efectuada por qualquer ordem, uma vez que R é uma região quer do tipo I, quer do tipo II. Integramos primeiro em

$$\text{relação a } x. \text{ Com esta escolha temos assim } \iiint_G z dV = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z dz dx dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=0}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy = \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2} (1-y^2) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y^2) x \Big|_{x=0}^y dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (y-y^3) dy, \quad \text{isto é,}$$

$$\iiint_G z dV = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Cálculo de Volumes Sob a Forma de Um Integral Triplo.

Os integrais triplos podem ter diferentes interpretações físicas, mas aqui preocupar-nos-emos apenas com o aspecto do volume. No caso especial em que

$f(x, y, z) = 1$, da fórmula $\iiint_G f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$ vem $\iiint_G dV =$

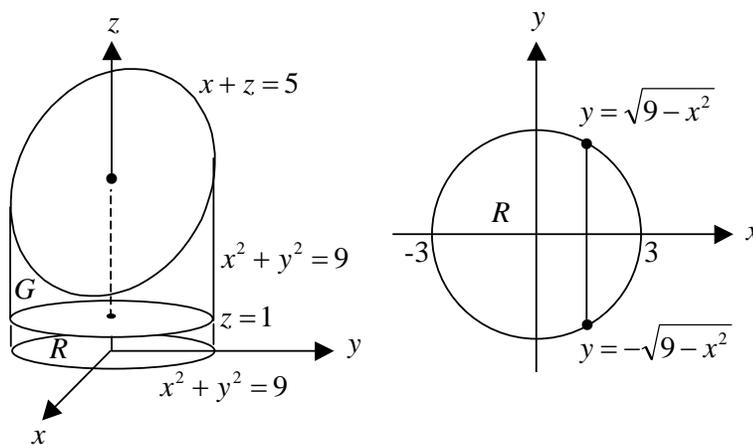
$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \Delta V_k,$$

que a primeira figura apresentada quando começamos a falar sobre

integrais triplos sugere ser o volume de G , isto é, volume de $G = \iiint_G dV$.

Exemplo – Use um integral triplo para encontrar o volume do sólido limitado entre o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e os planos $z = 1$ e $x + z = 5$.

O sólido G e a sua projecção R no plano xy são mostrados na figura: A superfície inferior do sólido é o plano $x + z = 5$, ou, do mesmo modo, $z = 5 - x$. Assim, de



$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

e de volume de $G = \iiint_G dV$ vem volume de

$$G = \iiint_G dV = \iint_R \left[\int_1^{5-x} dz \right] dA.$$

Para o integral duplo sobre R , integraremos primeiro em

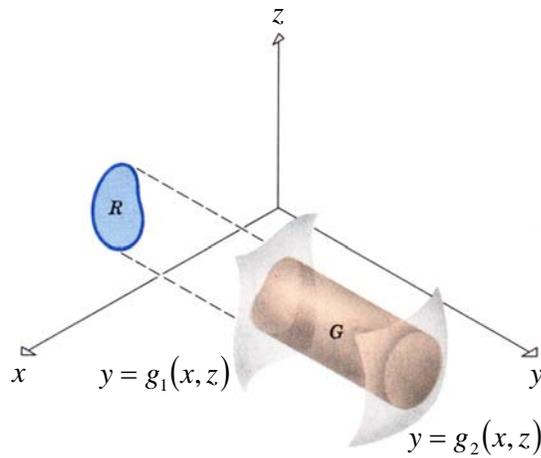
relação a y . Assim, temos volume de $G = \int_{-3-\sqrt{9-x^2}}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_1^{5-x} dz dy dx = \int_{-3-\sqrt{9-x^2}}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} z \Big|_{z=1}^{5-x} dy dx =$

$$= \int_{-3-\sqrt{9-x^2}}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (4-x) dy dx = \int_{-3}^3 (8-2x)\sqrt{9-x^2} dx = 8 \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx - \int_{-3}^3 2x\sqrt{9-x^2} dx, \quad \text{e assim,}$$

volume de $G = 8\left(\frac{9}{2}\pi\right) - \int_{-3}^3 2x\sqrt{9-x^2} dx = 8\left(\frac{9}{2}\pi\right) - 0 = 36\pi$ com $(u = \sqrt{9-x^2})$.

Integração por Outras Ordens.

Para determinadas regiões, os integrais triplos são mais facilmente calculados efectuando primeiro a integração em relação a x ou a y , e não em relação a z . Por exemplo, se o sólido G é limitado à esquerda e à direita pelas superfícies $y = g_1(x, z)$ e $y = g_2(x, z)$ e limitada lateralmente por um cilindro que se estende na

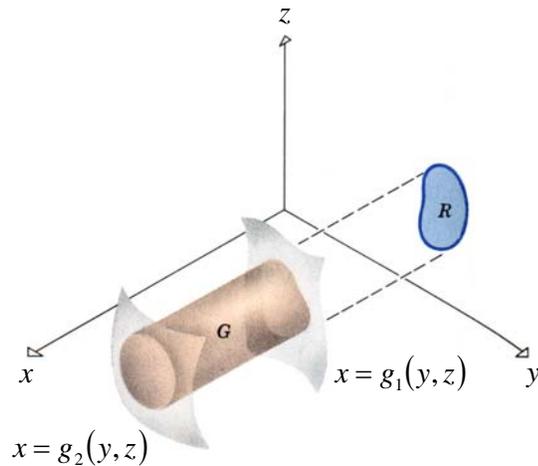


direcção de y , então $\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right] dA$, onde R é a projecção

do sólido G no plano xy . Similarmente, se o sólido G é limitado atrás e à frente pelas superfícies $x = g_1(y, z)$ e $x = g_2(y, z)$ e limitado lateralmente por um cilindro que se estende na direcção de x , então

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$

onde R é a projecção do sólido G no plano xy .

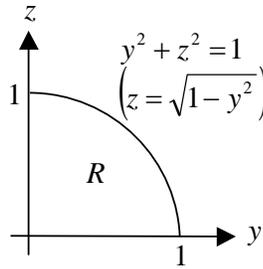


Exemplo – No segundo exemplo dos integrais triplos, calculamos $\iiint_G z dV$ integrando

primeiro em relação a z . Vamos calcular novamente o mesmo integral, cuja solução foi $\frac{1}{8}$, integrando agora primeiro em relação a x .

O sólido é limitado atrás pelo plano $x=0$ e à frente pelo plano $x=y$, assim

$\iiint_G z dV = \iint_R \left[\int_0^y z dx \right] dA$ onde R é a projecção de G no plano xy : $y^2 + z^2 = 1$ ($z = \sqrt{1-y^2}$). A integração sobre R pode ser efectuada em primeiro lugar em relação a z e então depois em relação a y ou vice-versa. Efectuando primeiro a



integração em relação a z vem $\iiint_G z dV = \int_0^1 \int_0^y \int_0^y z dx dz dy = \int_0^1 \int_0^y z x \Big|_{x=0}^y dz dy =$

$= \int_0^1 \int_0^y z y dz dy = \int_0^1 \frac{1}{2} z^2 y \Big|_{z=0}^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (1-y^2) y dy = \frac{1}{8}$, o que está de acordo com o resultado anterior.

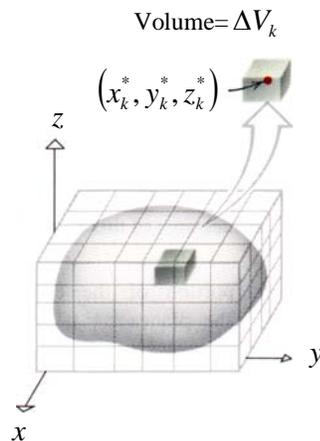
Integrais Triplos em Coordenadas Cilíndricas.

Aquando dos integrais duplos, vimos que por vezes estes são mais facilmente calculados quando se convertem para coordenadas polares. Da mesma forma, alguns integrais triplos são mais facilmente calculados se estiverem em coordenadas cilíndricas.

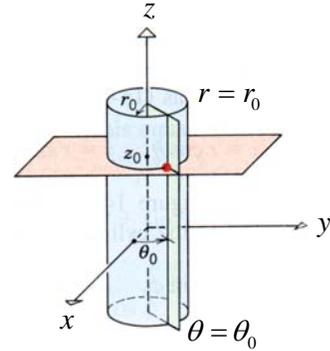
Recorde-se que em coordenadas rectangulares, o integral triplo de uma função contínua f sobre uma região sólida G é definido do seguinte modo

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$$

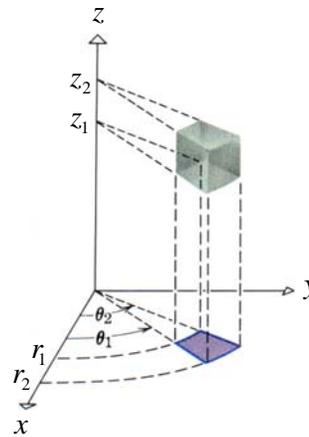
onde ΔV_k representa o volume de um paralelepípedo rectangular: interior a G e (x_k^*, y_k^*, z_k^*) é um ponto deste paralelepípedo. Os integrais triplos em coordenadas



cilíndricas e esféricas são definidos similarmente, excepto que a região G é dividida, não em paralelepípedos rectangulares, mas em regiões mais apropriadas a este sistema de coordenadas. Em coordenadas cilíndricas, as equações mais simples são da forma $r = \text{constante}$, $\theta = \text{constante}$, $z = \text{constante}$. Como indicado na figura ao lado a primeira equação representa um cilindro circular centrado no eixo dos z , a segunda representa um meio-plano vertical articulado no eixo dos z , e a terceira representa um plano horizontal. Estas



superfícies podem ser combinadas para determinar sólidos denominados *cunhas cilíndricas* ou *elementos de volume cilíndrica* é um sólido limitado entre dos seguintes tipos: dois cilindros ($r_1 < r_2$); dois meios planos $\theta = \theta_1$, dois planos $z = z_1$, $z = z_2$ ($z_1 < z_2$): $\theta_2 - \theta_1$, $r_2 - r_1$, e $z_2 - z_1$ são *ângulo central*, *espessura*, e *altura*

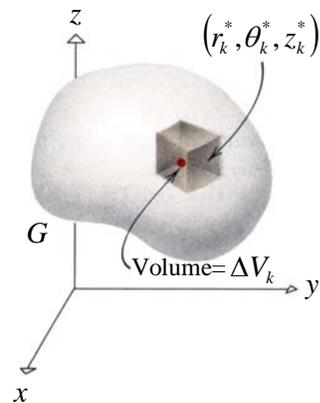


cilíndricos. Para que uma cunha seis superfícies $r = r_1$, $r = r_2$, $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ ($\theta_1 < \theta_2$); . As dimensões de denominadas o da cunha.

Para definir o integral triplo sobre G de uma função $f(r, \theta, z)$ em coordenadas cilíndricas procede-se como se indica a seguir:

1º. Subdivide-se G em peças através de uma grelha tri-dimensional consistindo em cilindros circulares concêntricos centrados no eixo dos z , meios-planos articulados no eixo dos z , e planos horizontais. Exclui-se da consideração todas as peças que contêm quaisquer pontos fora de G , deixando somente cunhas cilíndricas que são subconjuntos de G .

2º. Assume-se que existem n cunhas cilíndricas como estas, e note-se o volume da cunha cilíndrica de ordem k por ΔV_k . Como indicado na figura, seja $(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*)$ qualquer ponto na cunha cilíndrica de ordem k .

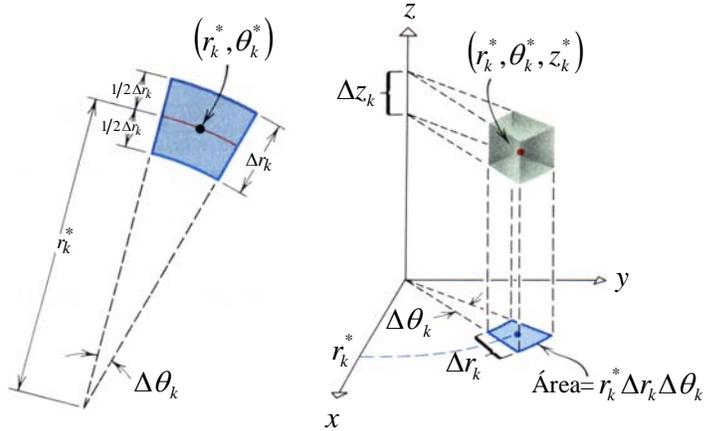


3º. Repete-se este processo com maior número de subdivisões, que à medida que n

aumenta, a altura, espessura e ângulo das cunhas cilíndricas se aproximam de zero. Define-se $\iiint_G f(r, \theta, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*) \Delta V_k$.

Para objectivos computacionais, é útil expressar o integral anterior como um integral iterativo. Para lá chegar, note-se que o volume ΔV_k da cunha cilíndrica de ordem k pode ser expresso como $\Delta V_k = [\text{área da base}] \cdot [\text{altura}]$. Se notarmos a espessura, ângulo central e altura desta cunha por Δr_k , $\Delta \theta_k$ e Δz_k , e se escolhermos o ponto

arbitrário $(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*)$ de modo a ficar acima do *centro* da base: segue-se da fórmula $\Delta A_k = r_k^* \Delta r_k \Delta \theta_k$, que já vimos quando estudamos os integrais duplos, que a base tem área $r_k^* \Delta r_k \Delta \theta_k$.



Assim, podemos escrever $\Delta V_k = r_k^* \Delta r_k \Delta \theta_k \Delta z_k = r_k^* \Delta z_k \Delta r_k \Delta \theta_k$. Substituindo esta

expressão em $\iiint_G f(r, \theta, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*) \Delta V_k$ vem $\iiint_G f(r, \theta, z) dV = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*, z_k^*) r_k^* \Delta z_k \Delta r_k \Delta \theta_k$ o que sugere que um integral triplo em

coordenadas cilíndricas pode ser calculado como um integral iterativo da forma

$$\iiint_G f(r, \theta, z) dV = \iiint_{\text{limites apropriados}} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta.$$

quando se converte o integral triplo num integral iterativo. Nesta fórmula, a integração é efectuada primeiro em relação a z , depois em relação a r , e então depois em relação a θ , mas qualquer outra ordem de integração é possível. O seguinte Teorema torna as ideias agora apresentadas mais precisas.

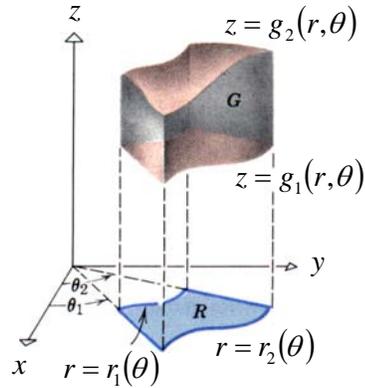
Teorema – Seja G um sólido simples cuja superfície superior tem a equação $z = g_2(r, \theta)$ e cuja superfície inferior tem a equação $z = g_1(r, \theta)$ em coordenadas cilíndricas. Se R for a projecção do sólido no plano xy , e se $f(r, \theta, z)$ for contínua

em G , então
$$\iiint_G f(r, \theta, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(r, \theta)}^{g_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) dz \right] dA$$
 onde o integral duplo sobre R

é calculado em coordenadas polares. Em particular, se a projecção R for como se mostra na figura, então o integral anterior pode ser

escrito do modo seguinte
$$\iiint_G f(r, \theta, z) dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{g_1(r, \theta)}^{g_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta.$$
 O tipo de sólido a que

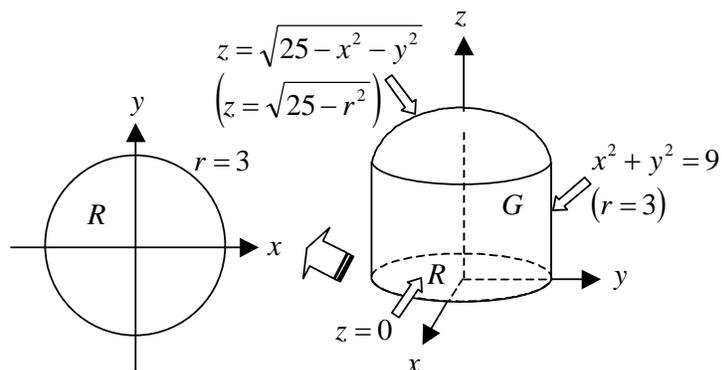
esta fórmula se aplica está ilustrado na figura à esquerda. Para aplicar as duas fórmulas atrás, é melhor começar com um esboço tri-dimensional do sólido G , do qual os limites de integração podem ser obtidos como se indica:



- 1ª. Identifica-se a superfície superior $z = g_2(r, \theta)$ e a superfície inferior $z = g_1(r, \theta)$ do sólido. As funções $g_1(r, \theta)$ e $g_2(r, \theta)$ determinam os limites de integração de z . Se as superfícies superior e inferior forem dadas em coordenadas rectangulares, devem converter-se em coordenadas cilíndricas,
- 2ª. Faz-se um esboço a duas dimensões da projecção R do sólido no plano xy . Deste esboço podem ser obtidos os limites de integração r e θ , exactamente como com os integrais duplos em coordenadas polares.

Exemplo – Use integração tripla em coordenadas cilíndricas para encontrar o volume do sólido G que é limitado pelo hemisfério $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ abaixo do plano xy , e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

O sólido G e a sua projecção R no plano xy mostram-se na figura. Em coordenadas cilíndricas, a superfície superior de G é o hemisfério $z = \sqrt{25 - r^2}$ e a sua



superfície inferior é o plano $z = 0$. Assim, o volume de G é $V = \iiint_G dV =$

$$= \iint_R \left[\int_0^{\sqrt{25-r^2}} dz \right] dA.$$

Para o integral duplo sobre R , usamos coordenadas polares: $V =$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-r^2}} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 [rz]_{z=0}^{\sqrt{25-r^2}} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r\sqrt{25-r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(25-r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^3 d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{61}{3} d\theta = \frac{122}{3} \pi.$$

Conversão de Integrais Triplos de Coordenadas Rectangulares em Cilíndricas.

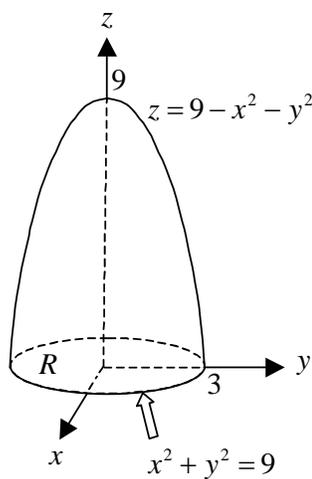
Por vezes um integral triplo que é difícil de integrar em coordenadas rectangulares pode ser mais facilmente calculado efectuando a substituição $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$ para converter o integral em coordenadas cilíndricas. Os integrais triplos em coordenadas rectangulares e cilíndricas podem ser relacionados pela equação

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{\text{limites apropriados}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta.$$

A ordem de integração pode ser

alterada, desde que os limites de integração sejam adequadamente ajustados.

Exemplo – Use coordenadas cilíndricas para calcular $\int_{-3-\sqrt{9-x^2}}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2 dz dy dx$.



Em problemas deste tipo, é aconselhável esboçar a região de integração G e a sua projecção R no plano xy . Dos limites de integração z pode dizer-se que a superfície superior de G é o parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ e a superfície inferior é o plano xy $z = 0$. Dos limites de integração x e y , vem que a projecção R é a região no plano xy limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 9$. Assim,

$$\int_{-3-\sqrt{9-x^2}}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2 dz dy dx = \iiint_G x^2 dV = \iint_R \left[\int_0^{9-r^2} r^2 \cos^2 \theta dz \right] dA, \text{ ou}$$

$$\begin{aligned}
& \iiint_G x^2 dV \int_0^{2\pi} \int_0^3 \left[z r^3 \cos^2 \theta \right]_{z=0}^{9-r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{9-r^2} (r^2 \cos^2 \theta) r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{9-r^2} r^3 \cos^2 \theta dz dr d\theta = \\
& = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9r^3 - r^5) \cos^2 \theta dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{9r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \cos^2 \theta \right]_{r=0}^3 d\theta = \frac{243}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = 243 \cdot \frac{1}{2} \times \\
& \times (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{243\pi}{4}.
\end{aligned}$$