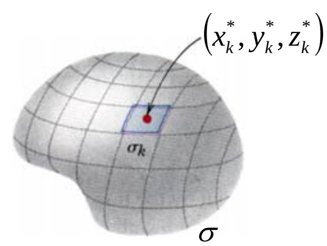
Capítulo V

INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

Capítulo V

Vamos falar sobre integrais sobre superfícies no espaço tri-dimensional. Estes integrais ocorrem em problemas envolvendo fluídos e calor, electricidade, magnetismo, massa, e centro de gravidade.

Definição – Se C é uma curva simples no espaço tri-dimensional, e $f(x,y,z)$ é contínua em C, então o integral de linha de f sobre C em relação ao comprimento de arco é definido subdividindo C em n arcos e definindo o integral de linha como o limite: $\int_C f(x,y,z)dS = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$ onde (x_k^*, y_k^*, z_k^*) é um ponto no arco de ordem k e ΔS_k é o comprimento do arco de ordem k.



Esta é uma definição de integral de linha que nos vai permitir definir integral de superfície de modo análogo: Seja σ uma superfície no espaço com área superficial finita, e seja $f(x,y,z)$ uma função contínua definida em σ. Como se pode ver na figura, subdivida-se σ nas partes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ com áreas $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$, e forme-se a soma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$ onde (x_k^*, y_k^*, z_k^*) é um ponto arbitrário em σ_k. Se repetirmos o processo de subdivisão, dividindo σ em mais e mais partes de tal modo que a dimensão máxima de cada parte se aproxime de zero quando $n \to +\infty$, verifica-se que se $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$ se aproxima de um limite que não depende do modo como as subdivisões são feitas ou como os pontos (x_k^*, y_k^*, z_k^*) são escolhidos, então este limite é chamado o *integral de superfície* de $f(x,y,z)$ sobre σ e é notado por $\int_C f(x,y,z)dS = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$.

Cálculo dos Integrais de Superfície.

Existem vários processos de cálculo dos integrais de superfície, dependendo de como a superfície σ é representada. O Teorema seguinte indica como calcular um integral de superfície quando σ é da forma $z = g(x, y)$, ou da forma $y = g(x, z)$ ou $x = g(y, z)$.

<u>Teorema</u> – (a) Seja σ uma superfície com a equação $z = g(x, y)$ e seja R a sua projecção no plano xy. Se g tiver primeiras derivadas parciais contínuas em R e $f(x, y, z)$ for contínua em σ, então teremos que $\iint_\sigma f(x, y, z)dS =$

$$= \iint_R f[x, y, g(x, y)]\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dA.$$

(b) Seja σ uma superfície com a equação $y = g(x, z)$ e seja R a sua projecção no plano xy. Se g tiver primeiras derivadas parciais contínuas em R e $f(x, y, z)$ for contínua em σ, então teremos que $\iint_\sigma f(x, y, z)dS =$

$$= \iint_R f[x, g(x, z), z]\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}dA.$$

(c) Seja σ uma superfície com a equação $x = g(y, z)$ e seja R a sua projecção no plano xy. Se g tiver primeiras derivadas parciais contínuas em R e $f(x, y, z)$ for contínua em σ, então teremos que $\iint_\sigma f(x, y, z)dS =$

$$= \iint_R f[g(y, z), y, z]\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}dA.$$

Para ilustrar como as fórmulas apresentadas neste Teorema podem ser obtidas, considere-se o caso onde σ é representado por uma equação da forma $z = g(x, y)$ sobre uma região R do plano xy. Neste caso, pode escrever-se $\iint_\sigma f(x, y, z)dS =$

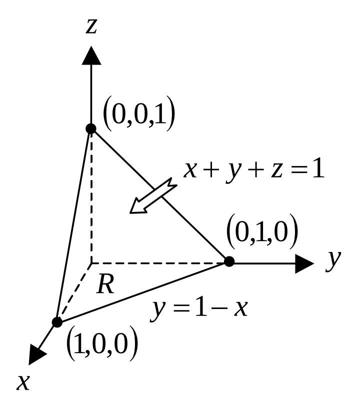
$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)\sqrt{g_x\left(x_k^*, y_k^*\right)^2 + g_y\left(x_k^*, y_k^*\right)^2 + 1}\Delta A_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*, g\left(x_k^*, y_k^*\right)\right)\times$$

$\times\sqrt{g_x\left(x_k^*, y_k^*\right)^2 + g_y\left(x_k^*, y_k^*\right)^2 + 1}\Delta A_k$. Como o limite nesta equação é um integral duplo sobre a região R, pode reescrever-se a equação como $\iint_\sigma f(x, y, z)dS =$

$= \iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{g_x(x,y)^2 + g_y(x,y)^2 + 1}\,dA$, ou equivalentemente $\iint_\sigma f(x,y,z)dS =$

$= \iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA$.

<u>Exemplo</u> – Calcule o integral de superfície $\iint_\sigma xzdS$ onde σ é a parte do plano $x+y+z=1$ que fica no primeiro octante.



A equação do plano pode ser escrita como $z = 1 - x - y$ que é da forma $z = g(x,y)$. Consequentemente, podemos aplicar a fórmula $\iint_\sigma f(x,y,z)dS =$ $= \iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA$ com $z =$ $= g(x,y) = 1 - x - y$ e $f(x,y,z) = xz$. Assim, $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$, portanto $\iint_\sigma f(x,y,z)dS$ torna-se $\iint_\sigma xzdS = \iint_R x(1-x-y)\times$ $\times\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1}\,dA$ onde R é a projecção de σ no plano xy. Reescrevendo o integral duplo como um integral iterativo vem $\iint_\sigma xzdS = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x}\left(x - x^2 - xy\right)dydx =$

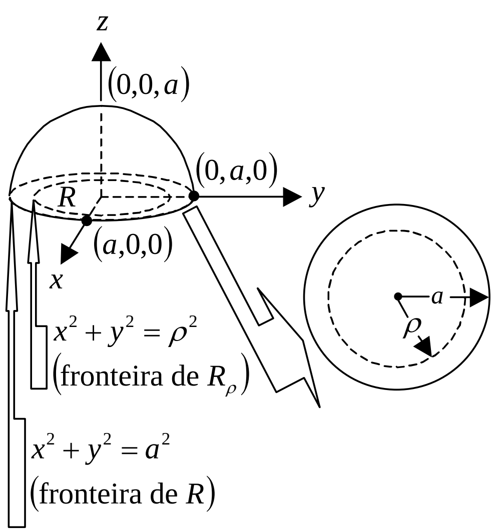
$$= \sqrt{3}\int_0^1 \left[xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{1-x} dx = \sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2}\right)dx = \sqrt{3}\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{24}.$$

Área de Uma Superfície Como Integral de Superfície.

No caso especial em que $f(x,y,z)$ é 1, a fórmula $\int_C f(x,y,z)dS =$ $= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right)\Delta S_k$ torna-se $\iint_\sigma dS = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k$. Mas para todos os valores de n, o somatório é a área superficial da superfície σ; e portanto, também o limite o é.

Deste modo, a área superficial da superfície σ pode ser expressa por $S = \iint_{\sigma} dS$.

<u>Exemplo</u> – Use a fórmula $\iint_{\sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{R} f[x,y,g(x,y)]\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dA$ para mostrar que a área superficial do hemisfério superior de raio a dado pela equação $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ é $2\pi a^2$.



Como se vê na figura, a projecção do hemisfério no plano xy é a região circular R de raio a centrado na origem. No entanto, não podemos aplicar o Teorema directamente porque as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ não existem na fronteira da região R uma vez que $x^2 + y^2 = a^2$ aí. De forma a ultrapassar este problema calcula-se o integral duplo sobre uma região circular ligeiramente mais pequena R_ρ de raio ρ, e deixe-se ρ aproximar de a. Temos então $\iint_{\sigma} dS = \lim_{\rho \to a^-} \iint_{R_\rho} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dA =$

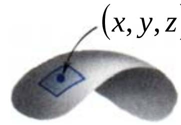
$= \lim_{\rho \to a^-} \iint_{R_\rho} \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1}dA = \lim_{\rho \to a^-} \iint_{R_\rho} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA$ e assim $\iint_{\sigma} dS =$

$= \lim_{\rho \to a^-} \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta = \lim_{\rho \to a^-} \int_0^{2\pi} \left[-a\sqrt{a^2 - r^2}\right]_{r=0}^{\rho} d\theta = \lim_{\rho \to a^-} \int_0^{2\pi} \left(a^2 - a\sqrt{a^2 - \rho^2}\right) d\theta$, isto é, $\iint_{\sigma} dS = \lim_{\rho \to a^-} 2\pi\left(a^2 - a\sqrt{a^2 - \rho^2}\right) = 2\pi a^2$.

Massa de Uma Lâmina Curva Como Integral de Superfície.

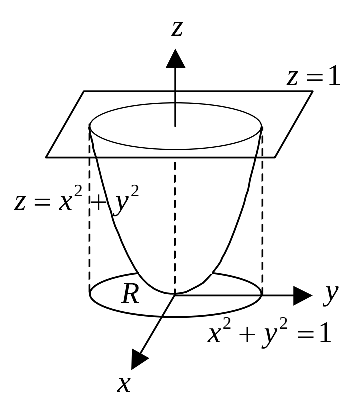
Define-se uma *lâmnina curva* como um objecto idealizado no espaço tri-dimensional que é suficientemente fino para poder ser olhado como uma superfície. Uma lâmina curva pode parecer-se com um prato arqueado:  , ou pode encerrar uma região do espaço tri-dimensional, como a casca de um ovo. Se a composição de uma lâmina curva é uniforme, então a lâmina é denominada *homogénea* e a sua *densidade* é definida como sendo a massa total dividida pela sua área superficial total. No entanto, se a lâmina não é homogénea, então a densidade varia de ponto para ponto, e neste caso a densidade de uma lâmina curva σ é descrita por uma função de densidade $\delta(x,y,z)$, cujo valor no ponto (x,y,z) é: $\delta(x,y,z)=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta M}{\Delta S}$

A espessura de uma lâmina curva é desprezável.

no qual ΔM e ΔS representam a área superficial de uma pequena secção de lâmina contendo o ponto (x,y,z): 

assim, se a lâmina é subdividida em n pequenas partes, e se (x_k^*,y_k^*,z_k^*) é um ponto na parte de ordem k e ΔS_k é a área superficial da parte de ordem k, então de $\delta(x,y,z)=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta M}{\Delta S}$, a massa ΔM_k dessa parte pode ser aproximada como $\Delta M_k \approx \delta(x_k^*,y_k^*,z_k^*)\Delta S_k$ e assim a massa M da lâmina inteira pode ser aproximada como $M=\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta M_k \approx \sum\limits_{k=1}^{n}\delta(x_k^*,y_k^*,z_k^*)\Delta S_k$. Se agora aumentarmos n de tal modo que as dimensões das partes se aproximem de zero, o valor exacto de M será dado pelo integral de superfície $M=\iint\limits_{\sigma}\delta(x,y,z)dS$.

<u>Exemplo</u> – Uma lâmina curva σ é a porção do parabolóide $z=x^2+y^2$ abaixo do plano $z=1$ e tem densidade constante $\delta(x,y,z)=\delta_0$. Encontre a massa da lâmina.

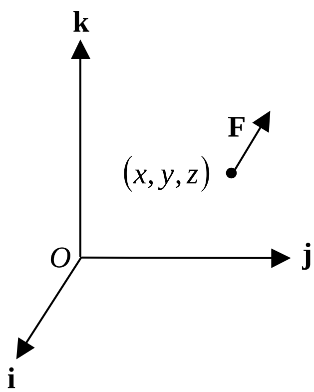


Uma vez que $z=g(x,y)=x^2+y^2$, segue-se que $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y$. Substituindo estas expressões e $\delta(x,y,z)=\delta(x,y,g(x,y))=\delta_0$ em $M=\iint\limits_{\sigma}\delta(x,y,z)dS$ vem $M=\iint\limits_{\sigma}\delta_0 dS=\iint\limits_{R}\delta_0\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\,dA=\delta_0\times$

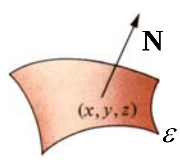
$\times \iint_R \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dA$ onde R é a região circular fechada por $x^2+y^2=1$. Para calcular o integral usamos coordenadas polares: $M=\delta_0 \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta = \frac{\delta_0}{12}\times$
$\times \int_0^{2\pi} \left(4r^2+1\right)^{3/2}\Big]_{r=0}^1 d\theta = \frac{\delta_0}{12}\int_0^{2\pi}\left(5^{3/2}-1\right)d\theta = \frac{\pi\delta_0}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$.

Fluxo de Um Campo Vectorial Através de Uma Superfície.

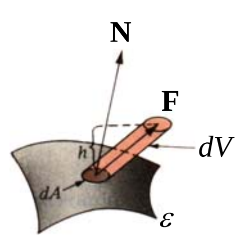
Analogamente a um campo escalar, que determina um escalar para cada ponto numa região tridimensional S, um *campo vectorial* associa um vector $\mathbf{F}=M(x,y,z)\mathbf{i}+$ $+N(x,y,z)\mathbf{j}+P(x,y,z)\mathbf{k}$ para cada ponto (x,y,z) em S:



Como o ponto (x,y,z) se desloca sobre S, o vector correspondente $\mathbf{F}$ pode variar, tanto em módulo quanto em direcção. Por exemplo, se um fluido se move através de uma região tridimensional S, o vector $\mathbf{F}$ pode representar a velocidade de uma partícula do fluido no ponto (x,y,z). No que se segue, habitualmente supomos que as funções componentes escalares M, N e P do campo vectorial $\mathbf{F}$ são continuamente diferenciáveis. Agora, suponha-se que ε é uma superfície no espaço xyz e que $\mathbf{N}$ denota um vector unitário normal a ε no ponto (x,y,z):



. Supomos que, como o ponto (x,y,z) se desloca sobre a superfície ε, o vector unitário normal $\mathbf{N}$ varia de modo contínuo. Suponha que ε está contida numa região tridimensional S, na qual o campo vectorial $\mathbf{F}$ está definido. Para uma melhor precisão, visualizamos $\mathbf{F}$ como o campo velocidade de um fluido que se move. Considere-se uma região infinitesimal de área dA num ponto sobre a superfície ε e seja $\mathbf{N}$ o vector unitário normal à superfície neste ponto:



. Após uma unidade de tempo, o fluido que passou através de dA forma um sólido cilíndrico infinitesimal de altura $h=\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}$ e com volume $dV=h\,dA=$ $=\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dA$.

O volume infinitesimal dV de fluido deslocado através da região infinitesimal dA em unidades de tempo é chamado de *fluxo* através de dA. Integrando dV sobre a superfície total ε obtemos o volume total de fluido deslocado através de ε na unidade de tempo; logo, definimos o *fluxo do campo vectorial* $\mathbf{F}$ *através da superfície* ε como sendo o integral de superfície $\iint_{\varepsilon} dV = \iint_{\varepsilon} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}dA$. Outras maneiras de representar o mesmo integral são $\iint_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dA$ ou ainda $\iint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$.

<u>Exemplo</u> – Seja ε a porção do plano $z = x + 2y + 1$ que está compreendida acima da região $D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$ no plano xy. Calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ através da superfície ε na direcção da normal $\mathbf{N}$, que faz um ângulo agudo com o eixo z.

Escrevendo a equação do plano na forma $x + 2y - z + 1 = 0$, encontramos que o vector $\mathbf{N}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é normal ao plano. Logo, o vector $\mathbf{N}_2 = -\mathbf{N}_1 = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Visto que $\mathbf{N}_2$ tem uma componente $\mathbf{k}$ positiva, segue-se que $\mathbf{N}_2$ faz um ângulo agudo com o eixo z positivo. Normalizando $\mathbf{N}_2$, obtemos o vector unitário normal desejado $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_2|} = \frac{-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{6}}$. Logo, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \frac{-x^3 - 2xy + z}{\sqrt{6}}$; assim, o fluxo através de ε é dado por $\iint_{\varepsilon} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}dA = \iint_{\varepsilon} \frac{-x^3 - 2xy + z}{\sqrt{6}} dA = \iint_{D} \frac{-x^3 - 2xy + z}{\sqrt{6}} \times$
$\times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} dxdy$, $\iint_{\varepsilon} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}dA = \iint_{D} \frac{-x^3 - 2xy + x + 2y + 1}{\sqrt{6}} \sqrt{1 + (1)^2 + (2)^2} dxdy =$

$$\int_0^2\int_0^1 \left(-x^3 - 2xy + x + 2y + 1\right) dxdy = \int_0^2 \left[\left(\frac{-x^4}{4} - x^2y + \frac{x^2}{2} + 2xy + x\right)\Bigg|_0^1\right] dy = \int_0^2 \left(y + \frac{5}{4}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} + \frac{5}{4}y\right) = \frac{9}{2}.$$

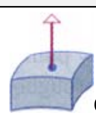
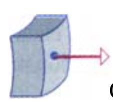
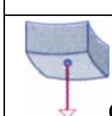
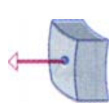
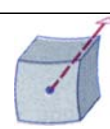
Para calcular o fluxo de $\mathbf{F}$ através de uma superfície orientada σ, é primeiro necessário encontrar uma fórmula para o vector normal $\mathbf{n}(x, y, z)$ que aparece a ser integrado. Tais fórmulas dependem da forma em como a superfície σ é expressa. A

Tabela seguinte apresenta as duas orientações possíveis e as fórmulas para $\mathbf{n}(\text{ou}\mathbf{N}) = = \mathbf{n}(x,y,z)$ para superfícies da forma $z = g(x,y)$, $y = g(x,z)$ e $x = g(y,z)$. As fórmulas da Tabela podem ser deduzidas considerando que as superfícies $z = g(x,y)$, $y = g(x,z)$ e $x = g(y,z)$ podem ser expressas na forma $G(x,y,z) = 0$, deslocando a função g para o lado esquerdo da equação. Nos três casos, a superfície σ é uma superfície de nível para $G(x,y,z)$, segue-se que ∇G, *gradiente*, é normal a σ em (x,y,z) e portanto $\dfrac{\nabla G}{|\nabla G|}$ e $-\dfrac{\nabla G}{|\nabla G|}$ são vectores unitários normais a σ em (x,y,z). Estes são os vectores que aparecem na Tabela. Por exemplo, se $z = g(x,y)$ então $G(x,y,z) = z - g(x,y)$ e então $\nabla G = -\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} = -\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$ assim $\dfrac{\nabla G}{|\nabla G|} =$

$$= \frac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$ que é a normal para a orientação positiva de $z = g(x,y)$

mostrada na Tabela. Multiplicando por -1 produz-se a orientação negativa.

Tabela

$z = g(x,y)$	$y = g(x,z)$	$x = g(y,z)$
 Componente $\mathbf{k}$ positiva $\Rightarrow \mathbf{n} = \dfrac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$ Orientação positiva (para cima)	 Componente $\mathbf{j}$ positiva $\Rightarrow \mathbf{n} = \dfrac{-\dfrac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \dfrac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ Orientação positiva (para cima)	 Componente $\mathbf{i}$ positiva $\Rightarrow \mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{i} - \dfrac{\partial x}{\partial y}\mathbf{j} - \dfrac{\partial x}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ Orientação positiva (para cima)
 Componente $\mathbf{k}$ negativa $\Rightarrow \mathbf{n} = \dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$ Orientação positiva (para baixo)	 Componente $\mathbf{j}$ negativa $\Rightarrow \mathbf{n} = \dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \dfrac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ Orientação positiva (para baixo)	 Componente $\mathbf{i}$ negativa $\Rightarrow \mathbf{n} = \dfrac{-\mathbf{i} + \dfrac{\partial x}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial x}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ Orientação positiva (para baixo)