ANÁLISE MATEMÁTICA II

Universidade Fernando Pessoa

Faculdade de Ciência e Tecnologia

Capítulo I - Funções Vectoriais

EXERCÍCIOS

1. Sendo **F**, **G** e **H** funções vectoriais de *t*, encontre uma fórmula para a derivada do produto misto (**F**x**G**)•**H**.

2. Seja **F** uma função vectorial de *t*. Demonstre que:

   a) $$\frac{d}{dt}\left(|\mathbf{F}|\right)=\frac{1}{|\mathbf{F}|}\mathbf{F}\bullet\frac{d\mathbf{F}}{dt}$$

   b) $$\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}\right]=\frac{1}{|\mathbf{F}|}\frac{d\mathbf{F}}{dt}-\frac{\mathbf{F}\bullet\frac{d\mathbf{F}}{dt}}{|\mathbf{F}|^3}\,\mathbf{F}$$

3. Seja *C* a curva cuja equação vectorial paramétrica é $\mathbf{R}=\sqrt{6}t^2\,\mathbf{i}+3t\,\mathbf{j}+4/3t^3\mathbf{k}$. Calcule o comprimento do arco *s* de *C* entre os pontos t=0 e t=1. (R: 13/3)

4. Ache o comprimento do arco da curva $\mathbf{R}=3t^2\,\mathbf{i}+(t^3-3t)\,\mathbf{j}$ entre t=1 e t=2. (R:10)

5. Seja $\mathbf{R}=(2t^2+2)\,\mathbf{i}+(t^2-2t)\,\mathbf{j}+(t^2-1)\mathbf{k}$. Determine o vector normal unitário principal. (R: $\mathbf{N}=\dfrac{(-2t+2)\,\mathbf{i}+2t\,\mathbf{j}+(-t+1)\mathbf{k}}{\sqrt{5}\sqrt{6t^2-2t+1}}$)

6. Seja $\mathbf{R}=2\cos t\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$. Determine $\mathbf{V}$, $|\mathbf{V}|$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{V}\mathrm{x}\mathbf{A}$, k e $\mathbf{N}$.

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

7. Uma partícula P move-se no espaço de acordo com a equação de movimento $\mathbf{R} = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\sin t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$. No instante $t=\pi/2$ determine:

a) a velocidade da partícula. (R: $\sqrt{16+\pi^2}$)

b) o vector aceleração. (R: $\mathbf{A} = -4\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$)

8. A equação de velocidade de uma partícula é $\mathbf{V} = \mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

Determine o seu vector posição para t=1, sabendo que para t=0, $\mathbf{R} = -\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. (R: $\mathbf{R} = 5/2\,\mathbf{j} + 13/3\mathbf{k}$)

9. Determine o ponto (3, π/6) no sistema de coordenadas polares. Determine as coordenadas polares equivalentes para este ponto nos casos:

a) r<0 e $0\leq\theta<2\pi$ (R: P=(-3, 7π/6))

b) r>0 e $-2\pi\leq\theta<0$ (R: P=(3, -11π/6))

c) r<0 e $-2\pi\leq\theta<0$ (R: P=(-3, -5π/6))

10. Converta os seguintes pontos para coordenadas polares com $r\geq0$ e $-\pi\leq\theta<\pi$:

a) P=(2,2) (R: P=($2\sqrt{2}$, π/4)

b) P=(5,-5/$\sqrt{3}$) (R: P=(10/$\sqrt{3}$, -π/6)

11. Determine o comprimento do arco total da curva polar r=2(1-cosθ). (R: 16)

12. Determine o comprimento do arco da curva polar $r=4\theta^2$ entre θ=0 e θ=3/2. (R: 61/6)

13. Determine o comprimento do arco da curva $\begin{cases} r = 5 \\ \theta = 2\pi t \\ z = 3t \end{cases}$ entre os pontos t=0 e t=1. (R: $\sqrt{100\pi^2 + 9}$)

14. Considere a seguinte curva: $x^2+y^2=9$.

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

a) Escreva a equação desta curva em coordenadas polares. Identifique a curva.

b) Determine o comprimento do arco da curva entre θ=0 e θ=2π. (R: 6π)

15. Considere a seguinte curva em coordenadas cilíndricas: $\begin{cases} r^2 = t^4 + t^2 \\ r\cos\theta = t \\ z = t^3 \end{cases}$

a) Determine as equações paramétricas da curva em coordenadas rectangulares e o vector posição em função de *t*.

b) Determine o vector normal unitário principal.

c) Determine o comprimento do arco da curva entre os pontos *t*=0 e *t*=1.

EXERCÍCIOS DIVERSOS

16. Uma partícula move-se no plano de modo a que a sua posição no tempo *t* tem coordenadas polares *r*=*t* e θ=*t*. Determine:

a) o vector velocidade; (R: $\mathbf{v} = (\cos t - t\sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t\cos t)\mathbf{j}$)

b) o vector aceleração; (R: $\mathbf{a} = (-2\sin t - t\cos t)\mathbf{i} + (2\cos t - t\sin t)\mathbf{j}$)

c) a curvatura. (R: $k = \dfrac{2+t^2}{(1+t^2)^{3/2}}$)

17. Deduza a fórmula do comprimento de arco de uma curva em coordenadas cilíndricas.

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Universidade Fernando Pessoa

Faculdade de Ciência e Tecnologia

Capítulo 2 - Cálculo Diferencial em Campos Escalares e Vectoriais

EXERCÍCIOS

1. Seja $g(x,y,z)=\dfrac{xy}{x^2+y^2-z}$ definida para $x^2+y^2-z\neq 0$.

   a) Determine $g(2,3,7)$. (R: 1)

   b) Determine $g(\sin t,\cos t,0)$. (R: $\sin t\cos t$)

2. Considere a seguinte função: $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

   a) Determine o domínio de $f(x,y)$.

   b) Esboce o gráfico da função.

3. Encontre e esboce o domínio de $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{y}$.

4. Encontre e esboce o domínio de $\mathrm{f}(x,y)=\ln(x^2-y)$.

5. Seja $f(x,y)=80-x/20-y/25$.

   a) Determine $f(60,75)$. (R:74)

   b) Encontre a equação da curva de nível $f(x,y)=70$. (R:$5x+4y=1000$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

c) Esboce a curva de nível $f(x,y)=70$.

6. Calcule $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} (5x^2y + 2xy - 3\frac{y^2}{x+y})$. (R: -6)

7. Seja $f(x,y) = \frac{2x^2 y}{3x^2 + 3y^2}$.

a) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende para (0,0) ao longo de cada um dos seguintes caminhos:

i) eixo dos *xx*; (R:0)

ii) eixo dos *yy*; (R:0)

iii) recta $y=x$; (R:0)

iv) parábola $y=x^2$.(R:0)

b) Este limite existe?

8. Seja $f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + x}{z - \pi}$. Determine o limite de $f(x,y,z)$ à medida que (x,y,z) tende para $(-1,0,\pi)$ ao longo da curva de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}.$$ (R: 0)

9. Considere a função $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$.

a) Esboce o domínio de *f*.

b) Prove que *f* é uma função contínua em todo o seu domínio.

10. Seja $w=xy^2z^3$. Determine:

a) $\frac{\partial w}{\partial x}$; (R: y^2z^3)

b) $\frac{\partial w}{\partial y}$; (R: $2xyz^3$)

c) $\frac{\partial w}{\partial z}$; (R: $3xy^2z^2$)

11. Seja $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$. Determine $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$.

(R: $\dfrac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2},\dfrac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$)

12. Seja $w=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Usando a regra da cadeia determine $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

(R: $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$)

13. Determine o coeficiente angular da recta tangente à curva na intersecção da superfície $z=4x^2y-xy^3$ com o plano $y=2$ no ponto $P=(3,2,48)$. (R:40)

14. O volume de um cilindro é dado por $V=\pi r^2 h$, sendo r o raio e h a altura do cilindro.

a) Determine a taxa de variação de V em relação a r mantendo h constante. (R:$2\pi rh$)

b) Determine a taxa de variação de V em relação a h mantendo r constante. (R:πr^2)

c) Seja $h=4$ cm. Determine a taxa de variação de V em relação a r quando $r=6$ cm. (R: 48π cm^2)

d) Seja $r=8$ cm. Determine a taxa de variação de V em relação a h quando $h=10$ cm. (R: 64π cm^2)

15. Seja $z=4x^3y^2$. Determine a diferencial total dz. (R: $12x^2y^2\mathrm{d}x+8x^3y\mathrm{d}y$)

16. Usando a notação de diferencial total, determine a variação no comprimento da hipotenusa de um triângulo rectângulo com lados de 3 e 4 cm, quando se faz aumentar um dos lados de 3 para 3.2 cm enquanto que o outro diminui de 4 para 3.96 cm. (R: 0,088 cm)

17. Suponha que y seja uma função de x e z dada implicitamente pela equação $7x^3y - 4xyz^3 + x^2y^3z^2 - z - 14 = 0$. Determine $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial y}{\partial z}$ para x=1, z=0 e y=2. (R: -6, 1/7)

18. Seja $F(x, y, z) = x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0$. Por diferenciação implícita de F determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(R: $-\frac{2xz^2 + y^2}{2x^2z - 3z^2 + 4y}, -\frac{2xy + 4z}{2x^2z - 3z^2 + 4y}$)

19. As equações $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ relacionam as coordenadas polares com as cartesianas. Estas equações definem r e θ implicitamente como funções de x e y. Utilize a diferenciação implícita para calcular

a) $\frac{\partial r}{\partial x}$ (R:cosθ)

b) $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ (R:-1/(-sinθ/r))

c) $\frac{\partial r}{\partial y}$ (R:sinθ)

d) $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ (R:cosθ/r)

20. Sendo $z = \sqrt{xy + y}$, com x=cosθ e y=sinθ. Calcule a derivada total $\frac{dz}{d\theta}$ para θ=π/2. (R: -1/2)

21. Se $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com x=2t+1 e y=t^3, calcule $\frac{dz}{dt}$.

(R: $\frac{3t^5 + 4t + 2}{\sqrt{t^6 + 4t^2 + 4t + 1}}$)

22. Se w=f(x^2+y^2), prove que $y\frac{\partial w}{\partial x} = x\frac{\partial w}{\partial y}$.

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

23. Considere a seguinte função: $w(x,y,z)=z\sin\frac{y}{x}$ em que x, y e z são por sua vez funções das variáveis r e s: $\begin{cases} x = 3r^2 + 2s \\ y = 4r - 2s^3 \\ z = 2r^3 - 3s^2 \end{cases}$. Obtenha as expressões de $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial s}$ em termos das variáveis r e s.

24. Considere a função de duas variáveis $z(x,y)=y\ f(x^2-y^2)$ em que f é uma função derivável qualquer. Mostre que: $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

25. Determine a derivada direccional de e^{xy} no ponto (-2,0) na direcção do vector unitário **u** que faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo positivo dos xx. (R: $-\sqrt{3}$)

26. Determine o gradiente de $f(x,y)=3x^2y$ no ponto (1,2) e utilize-o para calcular a derivada direccional de f em (1,2) na direcção do vector $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$
(R: $\nabla f = 12\mathbf{i}+3\mathbf{j}, D_{\mathbf{u}} = \frac{48}{5}$)

27. Seja $f(x,y) = 2x^2y + x\,e^{y^2}$. Determine:
   a) O valor máximo da derivada direccional no ponto (1,0); (R: $\sqrt{5}$)
   b) O vector unitário da direcção para a qual o valor máximo calculado em a) é obtido. (R: $1/\sqrt{5}\,\mathbf{i}+2/\sqrt{5}\,\mathbf{j}$)

28. Seja $f(x,y)=4x^2+xy+9y^2$. Determine:
   a) $\nabla f\ (1,2)$ (R: $10\mathbf{i}+37\mathbf{j}$)
   b) $D_{\mathbf{u}} f\ (1,2)$ em que **u** é o vector unitário na direcção de $\mathbf{a}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}$.
   (R: -71/5)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

29. Se $f(x,y,z)=3x^2+8y^2-5z^2$, determine a derivada direccional de f em (1,-1,2) na direcção do vector **a** =2**i**-6**j**+3**k**. (R: 48/7)

30. A temperatura no ponto (x,y) de uma placa de metal é $T(x,y)=\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$.

a) Determine para o ponto (1,1) a taxa de variação da temperatura na direcção do vector **a** =2**i**-**j**. (R: $1/(9\sqrt{5})$).

b) Uma formiga está no ponto (1,1) e deseja caminhar na direcção para a qual a temperatura decresce mais rapidamente. Determine o vector unitário dessa direcção. (R: $-1/\sqrt{2}$ **i**$-1/\sqrt{2}$ **j**)

31. Determine as equações da recta normal e do plano tangente para as seguintes superfícies nos pontos dados:

a) $z=4x^3y^2+2y$, $P=(1,-2,12)$;

(R: $\dfrac{x-1}{48}=\dfrac{y+2}{-14}=\dfrac{z-12}{-1}$, $48x-14y-z=64$)

b) $z=xe^{-y}$, $P=(1,0,1)$;

(R: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$, $x-y-z=0$)

32. Determine quais os pontos da superfície $z=x^2-xy+y^2-2x+4y$ para os quais o plano tangente coincide com o plano xy. (R: $P=(0,-2,-4)$)

EXERCÍCIOS DIVERSOS

33. Admitindo que $xyz+z^2-1=0$ define $z=z(x,y)$ determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(R: $-\dfrac{yz}{xy+2z},-\dfrac{xz}{xy+2z},\dfrac{2x^2z}{(xy+2z)^2}$)

34. Se $x^2(2y+3z)+y^2(3x-4z)+z^2(x-2y)=xyz$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(R: $-\dfrac{4xy+6xz+3y^2+z^2-yz}{3x^2-4y^2+2xz-4yz-xy},-\dfrac{2x^2+6xy-8yz-2z^2-xz}{3x^2-4y^2+2xz-4yz-xy}$)

35. Dada a função $z = xy^2 + x^2 y$ com $y = \log_e x$ prove que $x\dfrac{\mathrm{d}\, z}{\mathrm{d}\, x} = \dfrac{\mathrm{d}\, z}{\mathrm{d}\, y}$.

36. Seja $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2 x^3$. Determine a, b e c sabendo que no ponto P=(1,2,-1) o vector gradiente $\vec{\nabla} f$ é paralelo ao eixo dos *zz* e tem módulo igual a 64. (R: *a*=6, *b*=24, *c*=-8)

37. Considere a função *z=z(x,y)* definida implícitamente pela equação $\varphi(x^2 + y^2 - z^2, e^z) + \psi(z^2 + x) = 0$. Determine as derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em função de x, y , z e de $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ e $\dfrac{\partial \psi}{\partial w}$ fazendo $u = x^2 + y^2 - z^2$, $v = e^z$ e $w = z^2 + x$.

(R: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2x\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \psi}{\partial w}}{-2z\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + e^z\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + 2z\dfrac{\partial \psi}{\partial w}}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2y\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{-2z\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + e^z\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + 2z\dfrac{\partial \psi}{\partial w}}$)

38. O caudal Q no plano *xy* é dado por $Q = \log_e \sqrt{x^2 + y^2}$. Determine a taxa de variação de Q em (1,1) segundo a direção do vector unitário $\vec{u} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$. (R: $\sqrt{2}/2$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Universidade Fernando Pessoa

Faculdade de Ciência e Tecnologia

Capítulo 3 - Integrais de Linha

EXERCÍCIOS

1. Calcule o integral de linha $\int_C (x^2+3y)dx+(y^2+2x)dy$ sendo C: $\begin{cases} x=t \\ y=t^2+1 \end{cases}$ para $0 \le t \le 1$. (R: 8)

2. Calcule o integral de linha $\int_C (x+y)dx+(y-x)dy$ sendo C o segmento de recta que une os pontos A=(1,1) e B=(4,2). (R: 11)

3. Calcule $\int_C \mathbf{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ sendo $\mathbf{F} = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ e C a curva cujo vector posição é $\vec{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ para $-1 \le t \le 1$. (R: 0)

4. Calcule $\int_C \mathbf{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ sendo $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ e C a curva cujas equações paramétricas são $\begin{cases} x=e^t \\ y=e^{-t} \end{cases}$ para $0 \le t \le 1$. (R: $\dfrac{e^3+3e^{-1}-4}{3}$)

5. A força variável $\mathbf{F} = (3x-4y)\,\mathbf{i} + (4x+2y)\,\mathbf{j}$ move uma partícula ao longo da curva C: $\begin{cases} x=4t+1 \\ y=3t^2 \end{cases}$ do ponto A=(1,0) ao ponto B=(9,12). Calcule o trabalho

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

realizado se as distâncias forem medidas em centímetros e a força em joules. (R: 440 ergs)

6. Uma partícula move-se do ponto A=(0,0) ao ponto B=(1,0) ao longo da curva C: $\begin{cases} x = t \\ y = \lambda t(1-t) \end{cases}$ enquanto está sujeita ao campo de forças $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + (x-y)\,\mathbf{j}$. Para que valor de λ é o trabalho realizado igual a 1? (R: -12)

7. Seja A=(1,0) e B=(1,1). Calcule $\int_C (x^2 - y)dx + (y^2 + x)dy$ sendo C o perímetro do triângulo OAB tomado na direcção anti-horária. (R: 1)

8. Seja $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$.

   a) Calcule o integral de linha $\int_C \mathbf{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, sendo C:

      i) o segmento de recta y=x de A=(0,0) a B=(1,1); (R: 1)

      ii) a parábola y=x^2 de A=(0,0) a B=(1,1); (R: 1)

      iii) a curva de equação y=x^3 de A=(0,0) a B=(1,1). (R: 1)

   b) Prove que este integral de linha é independente do percurso e calcule o seu valor entre os pontos A=(0,0) e B=(1,1) pelo teorema fundamental dos integrais de linha. (R: 1)

9. Mostre que o integral de linha $\int_C 2xdx + 2ydy + 4zdz$ é independente do percurso C em qualquer domínio no espaço e calcule o seu valor se C tiver pontos inicial A=(0,0,0) e terminal B=(2,2,2). (R: 16)

10. Prove que $\int_C y\sin x dx - \cos x dy$ é independente do percurso de integração. Calcule este integral entre os pontos A=(0,1) e B=(π,-1):

    a) pelo teorema fundamental dos integrais de linha; (R: 0)

    b) integrando ao longo do segmento de recta que vai de A a B. (R:0)

11. Calcule o integral de linha $\int_C (x+y)dx + (y^2 + x)dy$ sendo C: $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2 \end{cases}$ para $0 \leq t \leq 1$. (R: 23/6)

EXERCÍCIOS DIVERSOS

12. Encontre o valor de $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ quando $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ e C é o arco circular de A a B para $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. (R: π/4+1/3)

13. Considere o seguinte integral de linha: $\int_C (y+1)dx + xdy$

a) Calcule o seu valor sendo C: $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t \end{cases}$ para $1 \leq t \leq$ e.

b) Prove que este integral é independente do percurso de integração e calcule o seu valor através do teorema fundamental dos integrais de linha.

(R: e+1)

14. Calcule $\int_C (x+2y)\,\mathrm{d}\,x + (x-y)\,\mathrm{d}\,y$ sendo C a curva $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$ para $0 \leq t \leq \pi/4$.

(R: 1-π)

15. Seja $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (x+y)\,\vec{\mathbf{i}} + (x-y)\,\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$.

a) Calcule $\int_C \vec{F}.\mathrm{d}\,\vec{R}$ sendo $\mathbf{R} = t\,\vec{\mathbf{i}} + e^t\,\vec{\mathbf{j}} + \cos t\,\vec{\mathbf{k}}$ entre $0 \leq t \leq \pi$.

b) Prove que o integral da alínea anterior é independente do percurso de integração e calcule o seu valor através do teorema fundamental dos integrais de linha. (R: $\frac{\pi^2}{2} - \frac{e^{2\pi}}{2} + \pi e^{\pi} - 3/2$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

Capítulo 4 - Integrais múltiplos: 1ª Parte - Integrais duplos

EXERCÍCIOS

1. Calcule os seguintes integrais duplos:

   a) $\iint\limits_R 4xy^3 \text{ dA}$, sendo $R = \{(x,y): -1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2\}$ (R: 0)

   b) $\iint\limits_R x\sqrt{1-x^2} \text{ dA}$, sendo $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 2 \le y \le 3\}$ (R: 1/3)

   c) $\iint\limits_R (2+y-x) \text{ dA}$, sendo $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$ (R: 5)

   d) $\iint\limits_R x\cos(xy)\cos^2(\pi x) \text{ dA}$, sendo $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1/2, 0 \le y \le \pi\}$

   (R: $1/3\pi$)

2. Utilize um integral duplo para clacular o volume dos seguintes sólidos:

   a) sólido limitado superiormente pelo plano z=4-x-y e inferiormente pelo rectângulo $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$. (R: 5)

   b) sólido limitado superiormente pela superfície $z=3x^3+3xy$ e inferiormente pelo rectângulo $R = \{(x,y): 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$. (R: 144)

   c) sólido no primeiro quadrante limitado superiormente pela superfície $z=x^2$, lateralmente pelos planos x=2 e y=3 e inferiormente pelo plano z=0.

   (R: 8)

3. Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$ (R: 1/6)

b) $\int_1^2 \int_y^{3y} (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (R:14)

c) $\int_1^2 \int_{2x^2-2}^{x^2+x} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ (R: 19/12)

d) $\int_0^{\pi} \int_0^{\cos\theta} \rho\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$ (R: 1/3)

e) $\int_0^{\pi/2} \int_2^{4\cos\theta} \rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$ (R: 10π)

4. Utilize um integral duplo para calcular o volume dos seguintes sólidos:

a) tetraedro limitado pelas coordenadas planas e pelo plano z=4-4x-2y. (R: 4/3)

b) sólido limitado pela superfície z=6xy e pela região R cujas fronteiras são x=0, y=0, x=2 e y=x^2. (R: 12)

c) sólido limitado pela superfície z=$x$cosxy e pela região R cujas fronteiras são x=1, x=2, y=π/2 e y=2π/x. (R: -2/π)

d) sólido limitado pelo cilindro x^2+y^2=4 e pelos planos y+z=4 e z=0.
(R: -16π)

e) sólido limitado pela superfície z=1/(1+x^2) e pela região triangular com vértices (0,0), (1,1) e (0,1). (R: π/4-1/2ln2)

5. Calcule os seguintes integrais:

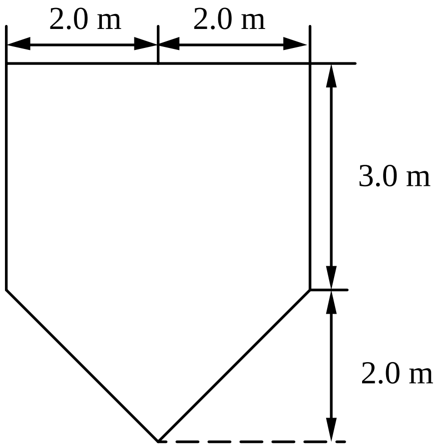
a) $\iint_R \mathrm{dA}$, sendo R a área limitada no primeiro quadrante pela parábola semicúbica y^2=x^3 e pela recta y=x.

i) considere R uma região tipo I.

ii) considere R uma região tipo II. (R: 1/10)

b) $\iint_R x^2\,\mathrm{dA}$, sendo R a área limitada no primeiro quadrante pela hipérbole xy=16 e as rectas y=x, y=0 e x=8. (R: 448)

6. Considere a planta de um reservatório representada na figura. Sabendo que a altura deste reservatório são 4.0 metros, determine a sua capacidade máxima.



(R: 64 m^3)

7. Seja R a região compreendida entre dois quadrados paralelos centrados na origem e cujos lados são paralelos aos eixos coordenados. Os lados são respectivamente iguais a 2 e 4. Calcule $\iint_R e^{x+y}\, \mathrm{dA}$. (R: $e^{-4}+e^{4}-e^{-2}-e^{2}$)

8. Utilize integração dupla para calcular a área das seguintes secções:

a) secção limitada pelas parábolas $y^2=4-x$ e $y^2=4-4x$. (R: 8)

b) secção limitada pelas rectas $x=0$ e $x=\pi/4$ e pelas curvas $y=\text{sen}x$ e $y=\cos x$. (R: $\sqrt{2}-1$)

9. Calcule o integral duplo $\iint_D (4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, sabendo que o domínio D está limitado pelas rectas $x=0$, $x=1$, $y=0$ e $y=3/2$. Inverta os limites e resolva novamente o integral. (R: 35/8)

10. Calcule o integral duplo $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$. Inverta os limites e calcule novamente o integral. (R: 26/105)

11. Calcule o integral duplo da função $f(x,y)=1+x+y$ sobre o domínio limitado pelas curvas $y=-x$, $x=\sqrt{y}$, $y=2$ e $z=0$. Inverta os limites e resolva novamente o integral. (R: $\frac{13}{3}+\frac{44}{15}\sqrt{2}$)

12. Inverta a ordem de integração do integral $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$.

13. Calcule $\iint_D e^{y/x}\mathrm{d}A$, sabendo que D é o triângulo limitado pelas rectas $y=x$, $y=0$ e $x=1$. Inverta os limites e resolva novamente o integral. (R: $(e-1)/2$)

14. Calcule o volume do corpo limitado pelas superfícies $x=0$, $y=0$, $x+y+z=1$ e $z=0$. Inverta os limites e resolva novamente o integral. (R: 1/6)

15. Seja $\int_0^1 \int_{3x}^{4-x^2} (1+xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

a) Calcule o integral duplo. (R: 33/8)

b) Represente graficamente o domínio de integração.

c) Inverta a ordem de integração (não é necessário calcular o novo integral).

16. Determine a área das seguintes superfícies através de um integral duplo polar:

a) região limitada pelo cardióide $r=1-\cos\theta$. (R: $3\pi/2$)

b) rosa de três pétalas $r=\sin 3\theta$. (R: $\pi/4$)

17. Calcule os seguintes integrais duplos em coordenadas polares:

a) $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}A$, sendo R a região limitada pelo círculo $x^2+y^2=1$.

(R: $\pi(1-1/e)$)

b) $\iint_R \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}A$, sendo R a região limitada pelo círculo $x^2+y^2=4$.

(R: $16\pi/3$)

18. Converta os seguintes integrais duplos em integrais duplos polares:

a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ (R: $\pi/8$)

b) $\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, a>0 (R: $\pi(1-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}})$)

19. Determine a área superficial da parte do cilindro $x^2+z^2=4$ acima do rectângulo $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 4\}$. (R: $4\pi/3$)

20. Determine a área da parte do cilindro $x^2+y^2=a^2$ cortada pelo cilindro $x^2+z^2=a^2$. (R: $8a^2$)

EXERCÍCIOS DIVERSOS

21. Considere o seguinte integral: $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} x \quad dxdy$.

a) Resolva o integral. (R: 11/12)

b) Represente o domínio de integração.

c) Inverta a ordem do integral (não é necessário calcular o novo integral).

22. Calcule e represente graficamente o volume do sólido limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + 4y^2$, inferiormente pelo plano $z=0$ e lateralmente pelos cilindros $y^2 = x$ e $x^2 = y$. (R: 3/7)

Capítulo 4 - Integrais múltiplos: 2ª Parte - Integrais triplos

EXERCÍCIOS

1. Calcule os seguintes integrais triplos:

a) $\int_0^2 \int_1^{y^2} \int_1^2 yz \, \mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y$ (R: 13/3)

b) $\int_0^a \int_0^x \int_0^y xyz \, \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ (R: $a^6/48$)

c) $\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} xe^y \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ (R: 178/3)

2. Calcule os seguintes integrais:

a) $\iiint_G xy\sin(yz)\,\mathrm{d}V$, em que G é a caixa rectangular definida por $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le \pi/6$. (R: $\pi^2/2 - 3\pi/2$)

b) $\iiint_G xyz\,\mathrm{d}V$, sendo G o sólido no 1º octante limitado pelo cilindro parabólico $z=2-x^2$ e pelos planos $z=0$, $y=x$ e $y=0$. (R: 1/6)

c) $\iiint_G (x+y+z)\,\mathrm{d}V$, sendo G o sólido limitado superiormente pelo plano $z=2-x-y$, inferiormente pelo plano $z=0$ e lateralmente pelo cilindro definido pela região triangular $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 1-x$. (R: 7/8)

3. Utilize um integral triplo para calcular o volume dos seguintes sólidos:

a) sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=9$ e os planos $z=1$ e $x+z=5$. (R: 36π)

b) sólido limitado pela superfície $y=x^2$ e pelos planos $y+z=4$ e $z=0$. (R: 256/15)

c) a cunha no 1º octante cortada do cilindro $y^2+z^2\leq 1$ pelos planos $x=0$ e $y=x$. (R: 1/3)

d) elipsóide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. (R: 4/3 $cba\pi$)

e) sólido limitado pelos parabolóides $z=5x^2+5y^2$ e $z=6-7x^2-y^2$. (R: $3\pi/\sqrt{2}$)

f) sólido limitado pelo parabolóide $z=4x^2+y^2$ e pelo cilindro parabólico $z=4-3y^2$. (R: 2π)

4. Calcule o seguinte integral triplo: $\iiint\limits_G xyz\,\mathrm{d}V$ sendo G o sólido limitado pelos planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ e $x+y+z=1$. (R: 1/720)

5. Nos integrais seguintes inverta a ordem de integração de modo a integrar primeiro em ordem a z, depois em ordem a y e finalmente em ordem a x.

a) $$\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-z^2}}\int_0^{\sqrt{9-y^2-z^2}} \mathrm{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

b) $$\int_0^4\int_0^2\int_0^{x/2} \mathrm{f}(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

6. A massa de um corpo G pode obter-se através da expressão: $M=\iiint\limits_G F\,\mathrm{d}V$ sendo F a sua densidade. Calcule a massa de um hemisfério de raio R e centro na origem das coordenadas, sabendo que a sua densidade F é proporcional em cada ponto (x,y,z) à distância desse ponto à base: $F=kz$. (R: $k\pi R^4/4$)

7. Utilize coordenadas cilíndricas para determinar o volume dos seguintes sólidos:

a) sólido limitado pelo parabolóide $z=x^2+y^2$ e pelo plano $z=9$. (R: $81\pi/2$)

b) sólido limitado pela superfície $r^2+z^2=20$ e $z=r^2$. (R: $80\sqrt{5}$/3-200)π)

c) cone de altura h cuja equação é $z=h/R\rho$. (R: $hR^2/3\pi$)

8. Considere o sólido no 1º octante limitado pelo parabolóide $z=r^2$, pelo cilindro $r=2\cos\theta$ e pelo plano $z=0$.

a) Esboce a região R no plano $r\theta$.

b) Determine o volume deste sólido. (R: $3\pi/4$)

c) Determine a sua massa sabendo que a densidade é proporcional à altura z (utilize a fórmula dada no problema 6.) (R: $5/6\pi k$)

EXERCÍCIOS DIVERSOS

9. Utilize um integral triplo para calcular o volume de uma esfera de raio a.

10. Calcule $\iiint_G 2x\,\mathrm{d}V$, sendo G a região do espaço no 1º octante limitada pelos planos $x=0$, $y=0$, $z=4$ e pela superfície $z^2 = x^2 + y^2$. (R: 128/3)

11. Considere o sólido limitado inferiormente pelo plano $z=1$, superiormente pela superfície $z = xy^2 + 2$, e lateralmente pelo cilindro definido por $y=0$, $y=2-x$ e $y=x^2$.

a) Calcule o volume deste sólido através de um integral triplo. (R: 39/40)

b) Troque a ordem de integração relativamente às variáveis x e y. *Não é necessário resolver o novo integral.*

c) Calcule o volume do sólido através de um integral duplo.

12. Calcule e represente o volume da região de $\Re^3$ limitada por $z \geq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \geq 4$ e $z \leq 8$. (R: 8π)

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Universidade Fernando Pessoa

Faculdade de Ciência e Tecnologia

Capítulo V - Integrais de Superfície

EXERCÍCIOS

1. Calcule o integral de superfície $\iint_\sigma y^2 z^2 \, \mathrm{d}S$ onde σ é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que fica entre os planos $z = 1$ e $z = 2$: (R: $21\pi / \sqrt{2}$)

2. Calcule a área da porção da superfície $z = x^2 + y^2$ que está compreendida sobre a região *D*: $x^2 + y^2 \leq 1$. (R: $\pi \dfrac{5\sqrt{5} - 1}{6}$)

3. Calcule a área da porção do plano $2x + 3y + z = 6$ que é cortada pelos três planos coordenados. (R: $3\sqrt{14}$)

4. Calcule o fluxo de água através do cilindro parabólico $S : y = x^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 3$ se o vector velocidade for $\vec{\mathrm{F}} = y\vec{\mathrm{i}} + 2\vec{\mathrm{j}} + xz\vec{\mathrm{k}}$, sendo a velocidade medida em m/s. (R: 12000 kg/s)

5. Seja σ a parte da superfície $z = 1 - x^2 - y^2$ que fica sobre o plano *xy*, e suponha que σ é orientada por um vector normal cujo sentido é concordante com o do eixo dos *zz*. Encontre o fluxo Φ do campo do fluído $\vec{\mathrm{F}}(x, y, z) = x\vec{\mathrm{i}} + y\vec{\mathrm{j}} + z\vec{\mathrm{k}}$ através de σ. (R: $3\pi/2$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca

6. Seja σ uma esfera com equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ orientada por um vector normal cujo sentido é concordante com o do eixo dos *zz*. Calcule $\iint_\sigma \vec{F}.\vec{n}\, dS$ sendo $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{k}$. (R: $4\pi a^3/3$)

EXERCÍCIOS DIVERSOS

7. Calcule $\iint_\sigma \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dS$, sendo σ a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ abaixo do plano $z = 1$. (R: $4\pi/3$)

8. Seja σ a parte superior do hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ orientada por um vector normal cujo sentido é concordante com o do eixo dos *zz*. Determine o fluxo Φ do campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = z^2\,\vec{k}$. (R: $\pi/2$)

Prof. Alzira Dinis
Prof. Ana Fonseca