Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise
Prof. Gabriel Pires

Teorema de Green no Plano

O teorema de Green permite relacionar o integral de linha ao longo de uma curva fechada Γ com um integral duplo na região limitada pela linha Γ em $\mathbb{R}^2$.

Neste texto, iremos usar a seguinte notação para o integral de linha de um campo vectorial $F = (P, Q)$ ao longo de uma linha Γ:

$$\int_\Gamma F \cdot dg = \int_\Gamma P dx + Q dy$$

Ao integral de linha de um campo vectorial F sobre um caminho simples e fechado Γ chamaremos circulação de F ao longo de Γ.

1 Domínio Elementar

Definição 1 *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e limitado. Diz-se que D é um* **domínio elementar** *se for descrito, simultaneamente, nas duas formas seguintes (c.f. [1]):*

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) < y < g(x) \; ; \; a < x < b\}$ em que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são duas funções de classe C^1.

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(y) < x < \psi(y) \; ; \; c < y < d\}$ em que $\phi, \psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ são duas funções de classe C^1.

Exemplo 1.1 Um intervalo em $\mathbb{R}^2$ é um domínio elementar tal como se ilustra na figura 1.

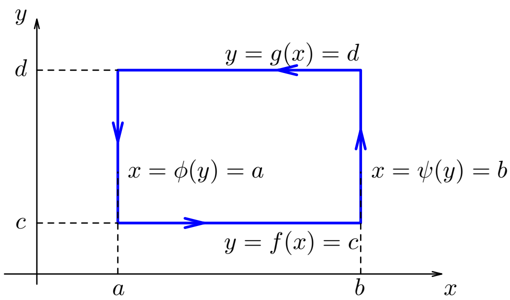

Figura 1: Um intervalo é um domínio elementar

Exemplo 1.2 Um círculo em $\mathbb{R}^2$ é um domínio elementar. Na figura 2 encontra-se um círculo de raio R e centrado na origem. Para este caso temos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\sqrt{R^2 - x^2} \; ; \; -R < x < R \\
g(x) &= \sqrt{R^2 - x^2} \; ; \; -R < x < R \\
\phi(y) &= -\sqrt{R^2 - y^2} \; ; \; -R < x < R \\
\psi(y) &= \sqrt{R^2 - y^2} \; ; \; -R < x < R
\end{aligned}$$

Exemplo 1.3 Um quarto de uma coroa circular no primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$ não é um domínio elementar mas é a união de seis domínios elementares como se ilustra na figura 3.

Exemplo 1.4 Um losango é a união de quatro domínios elementares, D_1, D_2, D_3, D_4, como se pode constatar na figura 4.

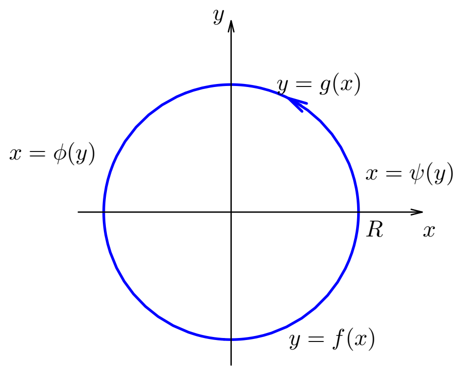

Figura 2: Um círculo é um domínio elementar

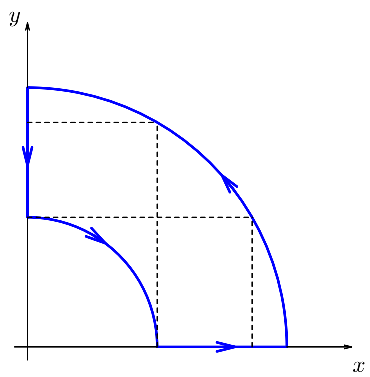

Figura 3: Uma coroa circular é a união de seis domínios elementares

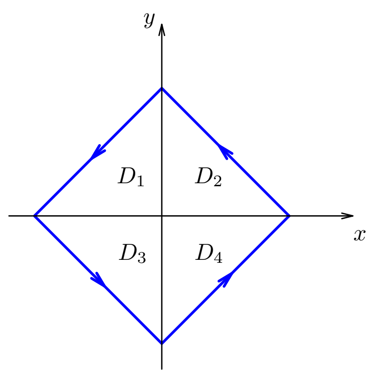

Figura 4: Um losango é a união de quatro domínios elementares

2 Teorema de Green

Teorema 2.1 *Seja* $D \subset \mathbb{R}^2$ *um domínio elementar e* Γ *a sua fronteira. Consideremos o campo vectorial* $F = (P, Q) : D \to \mathbb{R}^2$ *de classe* C^1*. Então,*

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_\Gamma Pdx + Qdy$$

em que a linha Γ *é percorrida no sentido positivo.*

Dado que $F = (P, Q) = (P, 0) + (0, Q)$ e sendo o integral linear, supomos que D é descrito na forma

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) < y < g(x) \; ; \; a < x < b \right\},$$

e que $F = (P, 0)$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \int\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(P(x, g(x)) - P(x, f(x)) \right) dx \end{aligned}$$

Por outro lado, a linha Γ é a união de quatro linhas

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

definidas por

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x, y) : a \leq x \leq b \, ; \, y = f(x)\} \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) : x = b \, ; \, f(b) \leq y \leq g(b)\} \\ \Gamma_3 &= \{(x, y) : a \leq x \leq b \, ; \, y = g(x)\} \\ \Gamma_4 &= \{(x, y) : x = a \, ; \, f(a) \leq y \leq g(a)\} \end{aligned}$$

e percorridas no sentido positivo. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} F \cdot dg &= \int_a^b P(x, f(x)) dx \\ \int_{\Gamma_2} F \cdot dg &= 0 \\ \int_{\Gamma_3} F \cdot dg &= -\int_a^b P(x, g(x)) dx \\ \int_{\Gamma_4} F \cdot dg &= 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Gamma Pdx = \int_\Gamma F \cdot dg = \int_a^b P(x, f(x)) dx - \int_a^b P(x, g(x)) dx = -\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Do mesmo modo, considerando $F = (0, Q)$ e D descrito na forma

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(y) < x < \psi(y) \; ; \; c < y < d \right\},$$

obtemos

$$\int_\Gamma Qdy = \int_\Gamma F \cdot dg = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy\,,$$

e, portanto,

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma Pdx + Qdy$$

***

Exemplo 2.1 O teorema de Green aplica-se também a uma união finita de domínios elementares.

Seja D a união de dois domínios elementares, D_1, D_2, tal como, a título de exemplo, se ilustra na figura 5. Seja L a linha comum às fronteiras de D_1 e D_2, ou seja,

$$\partial D_1 = \Gamma_1 \cup L \quad , \quad \partial D_2 = \Gamma_2 \cup L$$

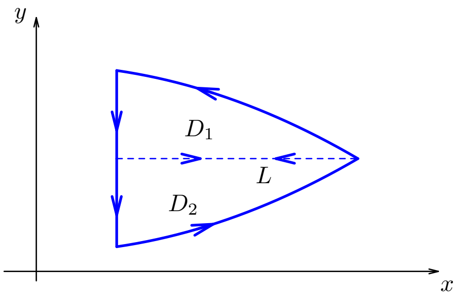

Figura 5: União de dois domínios elementares

Note-se que $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Aplicando o teorema de Green a ambos os domínios, obtemos

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy &= \int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy + \int_L Pdx + Qdy \\
\int\int_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy &= \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy - \int_L Pdx + Qdy
\end{aligned}$$

Note-se que o integral de linha de um campo vectorial F ao longo de um caminho tem o sinal contrário ao do integral de F ao longo da mesma linha mas percorrida no sentido contrário. Portanto, adicionando ambas as equações, obtemos

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma Pdx + Qdy$$

É claro que este procedimento é válido para uma união finita de domínios elementares.

Uma união finita de domínios elementares será designada *domínio regular.*

Exemplo 2.2 Consideremos um campo fechado $F = (P, Q)$, ou seja,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\,.$$

Seja Γ uma linha fechada em $\mathbb{R}^2$ que limita um domínio elementar. Então, pelo teorema de Green, a circulação de F ao longo de Γ é nula.

O mesmo se pode concluir para um domínio regular.

Exemplo 2.3 Seja D a coroa circular

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

e representada na figura 6.

Seja $F = (P, Q)$ um campo vectorial de classe C^1.

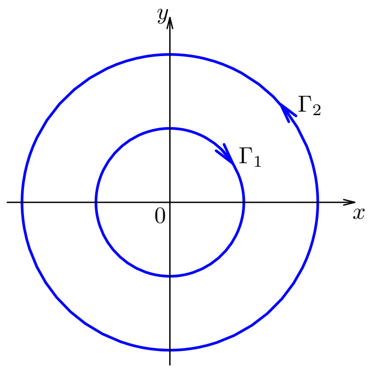

Figura 6: Coroa circular

A fronteira Γ de D é a união da circunferência de raio igual a dois, Γ_2, percorrida no sentido positivo, e da circunferência de raio igual a um, Γ_1, percorrida no sentido negativo. Do exemplo 1.3, fica claro que a coroa circular D é um domínio regular.

Aplicando o teorema de Green, obtemos

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy + \int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy$$

Para o caso em que o campo F é fechado, obtemos

$$\int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = -\int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy$$

Se as duas linhas Γ_1 e Γ_2 forem percorridas no sentido positivo, então

$$\int_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_2} Pdx + Qdy$$

Exemplo 2.4 Consideremos o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e definido por

$$F(x, y) = (-y, x)$$

e seja D um domínio regular cuja fronteira é a linha Γ percorrida no sentido positivo.

Sendo

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

do teorema de Green obtemos

$$\int\int_D 2dxdy = \int_\Gamma -ydx + xdy$$

ou seja, temos uma relação entre a área de D e o integral de linha de F ao longo da fronteira

$$\mathrm{vol}_2(D) = \frac{1}{2}\int_\Gamma F \cdot dg$$

Seja S o conjunto limitado por uma elipse, definido por

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$$

cuja fronteira Γ é descrita pelo caminho

$$g(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t)\ ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Então a área de S é dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(S) &= \frac{1}{2}\int_\Gamma -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-3\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t)\cdot(-2\,\mathrm{sen}\, t, 3\cos t) dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 6 dt \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

Exemplo 2.5 Consideremos o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x,y) = \left(-\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}, \frac{x}{x^2+(y-1)^2} \right)$$

e seja Γ a fronteira do quadrilátero com vértices nos pontos

$$(3,0), (0,3), (-3,0), (0,-3)$$

percorrida no sentido positivo e descrita por um caminho $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

Para calcular o integral de linha $\int_\Gamma F \cdot dg$, consideremos a região limitada por Γ e pela circunferência C de raio igual a um e centro no ponto $(0,1)$ percorrida no sentido positivo e descrita pelo caminho

$$g(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t + 1)\ ; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

como se mostra na figura 7.

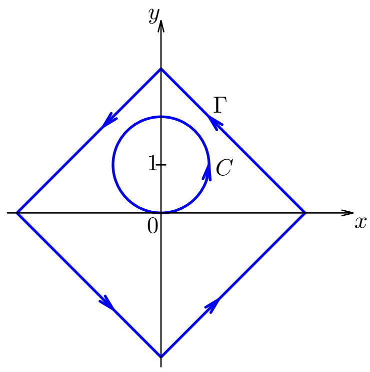

Figura 7:

Facilmente se verifica que o campo F é fechado e que a região considerada é um domínio regular.

Portanto, do teorema de Green obtemos,

$$\int_\Gamma F \cdot d\gamma = \int_C F \cdot dg$$

Por outro lado,

$$\int_C F \cdot dg = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) = 2\pi$$

e, portanto,

$$\int_\Gamma F \cdot d\gamma = 2\pi$$

Note-se que o cálculo directo do integral $\int_\Gamma F \cdot d\gamma$, pela definição, seria bastante mais complicado.

Referências

[1] J. E. Marsden and A. J. Tromba. *Vector Calculus.* Freeman, 1998.