Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$

4 Campos de Gradientes. Teorema de Green.

1. Averigúe se os seguintes campos de força definidos nos abertos Ω indicados são conservativos. Em caso afirmativo, calcule o potencial associado e esboce as linhas equipotenciais.

   (a) $F(x,y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   (b) $F(x,y) = (4xy, 2x^2+1)$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.

   (c) $F(x,y) = (8x^2+y^2+xy, 5y+2xy+2)$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.

2. Calcule o trabalho realizado pelos seguintes campos de força, ao deslocar um objecto ao longo das linhas $\mathcal{C}$ indicadas:

   (a) $F(x,y) = (x^2, xy)$, $\mathcal{C}$ é a semi-circunferência parametrizada por $x(t) = 2\cos(t)$, $y(t) = 2\sin(t)$, $0 \le t \le \pi$.

   (b) $F(x,y) = (x^2z, -yx^2, 3xz)$, $\mathcal{C}$ é o triângulo que liga os pontos $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(0,0,0)$ orientado neste sentido.

   (c) $F(x,y) = (2xy\sin(z), x^2\sin(z) - z\sin(y), x^2y\cos(z) + \cos(y))$, $\mathcal{C}$ é o triângulo que liga os pontos $(1,1,1), (1,1,0), (2,0,0), (1,1,1)$ orientado neste sentido. (Comece por calcular o rotacional do campo).

3. Considere o campo $\mathbf{F} : \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

   (a) Mostre que este campo é fechado.

   (b) Calcule a circulação de $\mathbf{F}$ ao longo da circunferência centrada em $(0,0)$ e de raio $R > 0$. O campo é conservativo?

   (c) Mostre que

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{s} = 0$$

   para qualquer curva de Jordan $\mathcal{C}$ que não contenha a origem no seu interior.

   (d) Justifique que a restrição de $\mathbf{F}$ ao aberto $\Omega' = \{(x,y) : x > 0 \ \wedge \ y > 0\}$ é um campo de gradientes e calcule o potencial associado.

4. Calcule $\int_{\mathcal{C}} (3x+2y)dx + (2x-y)dy$, onde $\mathcal{C}$ é:

   (a) o segmento orientado de $(0,0)$ para $(1,1)$.

   (b) o arco de parábola $y = x^2$ orientado de $(0,0)$ para $(1,1)$.

(c) a linha de equação $y = \sin(x\frac{\pi}{2})$ orientada de $(0,0)$ para $(1,1)$.

A forma diferencial $\omega = (3x+2y)dx + (2x-y)dy$ é exacta? Justifique.

5. Calcule, recorrendo ao Teorema de Green, os seguintes integrais (os contornos são orientados no sentido directo):

   (a) $\oint_{\mathcal{C}} x^2ydx + xdy$, onde $\mathcal{C}$ é o triângulo de vertices $(0,0),(1,0)$ e $(1,2)$.

   (b) $\oint_{\mathcal{C}} \log(1+y)dx - \dfrac{xy}{1+y}dy$, onde $\mathcal{C}$ é o triângulo que liga os pontos $(0,0),(2,0)$ e $(0,4)$.

   (c) $\oint_{\mathcal{C}} x^2ydx + (y+xy^2)dy$, onde $\mathcal{C}$ é a fronteira do conjunto delimitado pelas linhas de equação $y = x^2$ e $x = y^2$.

   (d) $\oint_{\mathcal{C}} (x^2-y)dx + xdy$, onde $\mathcal{C}$ é a circunferência centrada na origem de raio 2.

6. Utilize um integral de linha para calcular a área da região do plano

   (a) limitada pela elipse de equação $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$;

   (b) delimitada pela linha parametrizada por $x(t) = \cos^3(t)$, $y(t) = \sin^3(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

   (c) do primeiro quadrante delimitada pelas linhas de equação $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = \dfrac{x}{9}$.