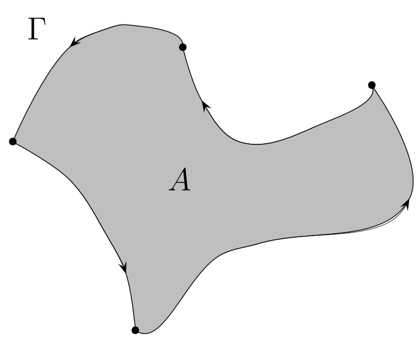
4. Teorema de Green

Seja U um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $\vec{r}:[a,b]\to U$ um caminho seccionalmente C^1, fechado e *simples*, isto é, $\vec{r}$ não se auto-intersecta, excepto nas extremidades. Seja A a região *interior* a $\Gamma=\vec{r}([a,b])$ – parte da dificuldade na formalização da versão mais geral do Teorema de Green deve-se ao facto de ser difícil definir com rigor o "interior"de uma curva fechada. No nosso curso aceitamos a noção intuitiva do que deve ser tal região do plano. Outra dificuldade reside na definição de "orientação" de um caminho. Vamos resignar-nos à seguinte definição: dizemos que o caminho fechado simples $\vec{r}$ está orientado no *sentido positivo* se $\vec{r}$ percorre a curva $\Gamma=\vec{r}([a,b])$ deixando à esquerda os pontos do interior de Γ.



Teorema 1 (Teorema de Green)**.** *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $\vec{F}=(F_1,F_2)$ um campo vectorial de classe C^1 sobre U. Suponha-se que $\vec{r}:[a,b]\to U$ é um caminho fechado simples, seccionalmente C^1, orientado no sentido positivo. Seja A o interior de $\Gamma=\vec{r}([a,b])$. Temos então:*

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\int_A \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)dydx. \tag{1}$$

Pelas razões acima referidas, a prova deste teorema para o caso geral está longe de ser realizável no âmbito deste curso. Assim, vamos restringir-nos a uma classe particular de regiões do plano:

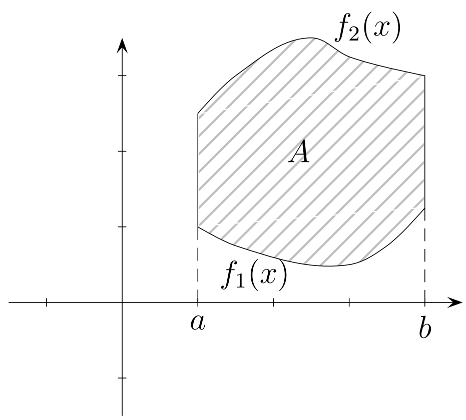
Definição 1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado. Diz-se que U é uma* região regular *se for simultaneamente x-regular e y-regular, isto é,*

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f_1(x) < y < f_2(x) \ \text{ e } \ a < x < b\}$$

e

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ h_1(y) < x < h_2(y) \ \text{ e } \ c < y < d\},$$

com f_1, f_2, h_1, h_2 funções de classe C^1.



Região x-regular

Exemplos. a) Um intervalo $I =]a, b[\times]c, d[$ é uma região regular de $\mathbb{R}^2$.

b) Um círculo $D \subset \mathbb{R}^2$, de raio R e centro em $P_0 = (x_0, y_0)$ é uma região regular. Com efeito,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} < y < y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}\}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x_0 - \sqrt{R^2 - (y - y_0)^2} < x < x_0 + \sqrt{R^2 - (y - y_0)^2}\}.$$

Vamos então provar o Teorema de Green no caso em que A é uma região regular. Neste caso, a fronteira de A é a curva

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

com

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, a \leq x \leq b \text{ e } y = f_1(x)\};$$

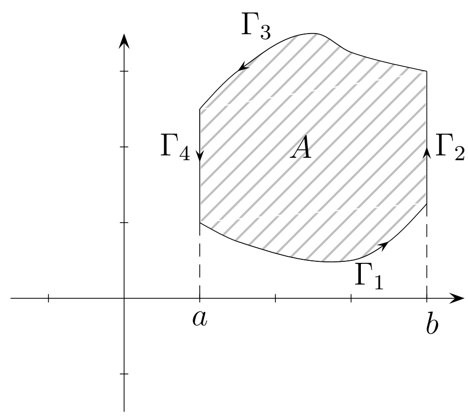
$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x = b \text{ e } f_1(b) \leq y \leq f_2(b)\};$$

$$\Gamma_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, a \leq x \leq b \text{ e } y = f_2(x)\};$$

$$\Gamma_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x = a \text{ e } f_1(a) \leq y \leq f_2(a)\}.$$

Para obtermos um caminho $\vec{r}$ para Γ orientado positivamente, podemos considerar:

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_1(t) = (t, f_1(t)) && t \in [a,b]; \\
&\vec{r}_2(t) = (b, t) && t \in [f_1(b), f_2(b)]; \\
&\vec{r}_3(t) = (a+b-t, f_2(a+b-t)) && t \in [a,b]; \\
&\vec{r}_4(t) = (a, f_1(a) + f_2(a) - t) && t \in [f_1(a), f_2(a)].
\end{aligned}$$



Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (F_1, 0) \cdot d\vec{r} &= \int_{\Gamma_1} (F_1, 0) \cdot d\vec{r}_1 + \int_{\Gamma_2} (F_1, 0) \cdot d\vec{r}_2 + \int_{\Gamma_3} (F_1, 0) \cdot d\vec{r}_3 + \int_{\Gamma_4} (F_1, 0) \cdot d\vec{r}_4 \\
&= \int_a^b F_1(t, f_1(t)) dt - \int_a^b F_1(t, f_2(t)) dt \\
&= \int_a^b \big\{ F_1(t, f_1(t)) - F_1(t, f_2(t)) \big\} dt.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int\int_A \frac{\partial F_1}{\partial y} dxdy = \int_a^b \Big[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y} dy\Big] dx$$
$$= \int_a^b \Big\{F_1(x, f_2(x)) - F_1(x, f_1(x))\Big\} dx.$$

Do mesmo modo, uma vez que a região A também pode ser descrita por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ h_1(y) < x < h_2(y) \ \text{ e } \ c < y < d\},$$

temos:

$$\int_\Gamma (0, F_2) \cdot d\vec{r} = \int_c^d \Big\{F_2(h_2(t), t) - F_2(h_1(t), t)\Big\} dt$$

e

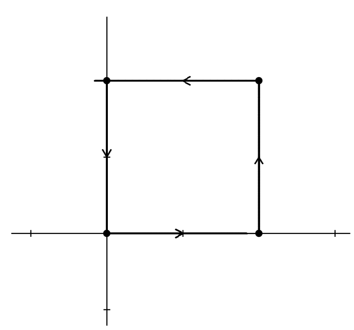
$$\int\int_A \frac{\partial F_2}{\partial x} dxdy = \int_c^d \Big\{F_2(h_2(y), y) - F_2(h_1(y), y)\Big\} dy.$$

Assim,

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma (F_1, 0) \cdot d\vec{r} + \int_\Gamma (0, F_2) \cdot d\vec{r}$$
$$= \int\int_A \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dxdy.$$

**

Seja Γ o quadrado de vértices em $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ e $(0, 2)$.



Seja $\vec{F}$ o campo vectorial dado por

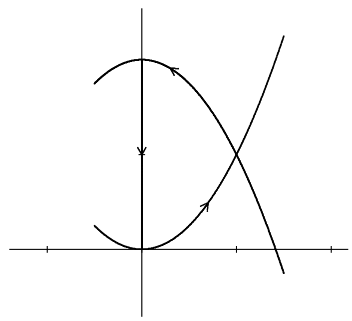
$$\vec{F} = (y^2, x).$$

Aplicando o Teorema de Green, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int\int_A \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dydx = \int_0^2 \Big[\int_0^2 \big(1-2y\big)dy\Big]dx \\ &= \int_0^2 \Big[y - y^2\Big]_0^2 dx = -2\int_0^2 dx = -4.\end{aligned}$$

**

Seja A a região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2$ para $x > 0$.



Seja $\vec{F} = (F_1, F_2)$ o campo vectorial

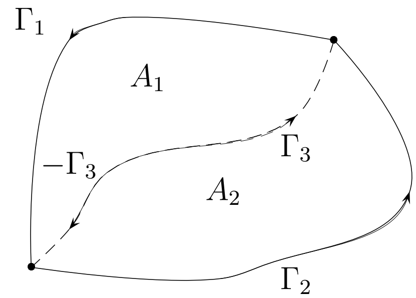
$$\vec{F} = (xy, x).$$

Pelo Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int\int_A \big(1-x\big)dxdy = \int_0^1 \Big[\int_{x^2}^{-x^2+2} \big(1-x\big)dy\Big]dx \\ &= \int_0^1 \Big[y - xy\Big]_{x^2}^{-x^2+2} dx = \int_0^1 \big(2x^3 - 2x^2 - 2x + 2\big)dx \\ &= \Big[\frac{x^4}{2} - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x\Big]_0^1 = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

**

Caso A_1 e A_2 sejam duas regiões do plano, tal como ilustra a figura seguinte, onde se possa aplicar o Teorema de Green, vamos ver que a fórmula (1) do Teorema de Green vale ainda para a união $A = A_1 \cup A_2$.



Repare-se que A é interior à curva

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Para um dado campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2)$, temos:

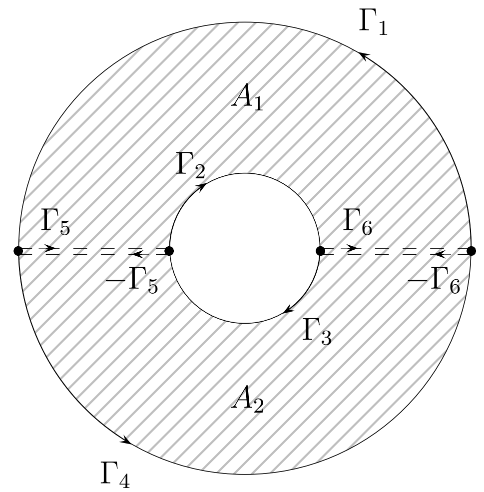
$$\int\int_{A_1} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dydx = \int_{\Gamma_1} \vec{F} + \int_{\Gamma_3} \vec{F};$$
$$\int\int_{A_2} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dydx = \int_{\Gamma_2} \vec{F} + \int_{-\Gamma_3} \vec{F}.$$

Somando as duas equações obtemos a fórmula do Teorema de Green para a região A:

$$\begin{aligned}\int\int_{A} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dydx &= \int\int_{A_1} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dydx + \int\int_{A_2} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dydx \\ &= \int_{\Gamma_1} \vec{F} + \int_{\Gamma_3} \vec{F} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} + \int_{-\Gamma_3} \vec{F} \\ &= \int_{\Gamma_1} \vec{F} + \int_{\Gamma_3} \vec{F} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} - \int_{\Gamma_3} \vec{F} \\ &= \int_{\Gamma_1} \vec{F} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} = \int_{\Gamma} \vec{F}.\end{aligned}$$

**

Esta discussão elucida-nos como tratar regiões que têm "buracos". Por exemplo, considere-se a coroa circular $A = A_1 \cup A_2$ da figura seguinte.



Esta região não é o interior de uma curva simples, mas sim a região limitida por duas curvas simples, a saber,

$$\Gamma^e = \Gamma_1 \cup \Gamma_4 \qquad \Gamma^i = \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$

Repare-se que a fronteira de A é

$$\Gamma = \Gamma^e \cup \Gamma^i.$$

Dado um campo vectorial $\vec{F} = (F_1, F_2)$, podemos aplicar o Teorema de Green para A_1 e para A_2 :

$$\int\int_{A_1} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dydx = \int_{\Gamma_1} \vec{F} + \int_{\Gamma_5} \vec{F} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} + \int_{\Gamma_6} \vec{F};$$
$$\int\int_{A_2} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dydx = \int_{\Gamma_4} \vec{F} + \int_{-\Gamma_6} \vec{F} + \int_{\Gamma_3} \vec{F} + \int_{-\Gamma_5} \vec{F}.$$

Somando, obtemos mais uma vez a fórmula do Teorema de Green:

$$\int\int_{A} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dydx = \int_{\Gamma^i} \vec{F} + \int_{\Gamma^e} \vec{F} = \int_{\Gamma} \vec{F}.$$

Note-se que as orientações indicadas para Γ^e e Γ^i “deixam à esquerda os pontos de A”.

**

Por exemplo, ainda em relação à figura anterior, suponha-se que as circunferências têm raios $R_1 = 1$ e $R_2 = 2$. Consideremos o campo vectorial $\vec{F} = (y^3, -x^3)$. Aplicando o Teorema de Green, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{F} &= \int\int_A \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dydx - 3\int\int_A \big(x^2 + y^2\big) dxdy \\
&= -3\int_0^{2\pi} \Big[\int_1^2 r^3 dr\Big] d\theta = -3\int_0^{2\pi} \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_1^2 d\theta \\
&= -\frac{45}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{45}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Exercícios

1. Verifique a validade do Teorema de Green nos seguintes casos:

   a) D o círculo de raio R centrado na origem e $\vec{F}(x, y) = (xy^2, -x^2y)$.

   b) D a região delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ e $\vec{F}(x, y) = (xy, x)$.

2. Seja Γ a fronteira do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, orientada no sentido directo. Usando o Teorema de Green, calcule:

   a) $\displaystyle\int_\Gamma (y^4 + x^3)dx + 2x^6 dy$.

   b) $\displaystyle\int_\Gamma x^2 y dx + 3yx^2 dy$.

   c) $\displaystyle\int_\Gamma (3x^4 + 5)dx + (y^5 + 3y^2 - 1)dy$.

   d) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{2y + \operatorname{sen} x}{1 + x^2} dx + \frac{x + e^y}{1 + y^2} dy$.

3. Seja C a circunferência de raio R centrada na origem, orientada no sentido directo. Usando o Teorema de Green, calcule:

   a) $\displaystyle\int_C y dx - x dy$.

   b) $\displaystyle\int_C (2e^x)dx + (x + \operatorname{sen} y^2)dy$.

4. Seja C uma curva fechada simples qualquer. Usando o Teorema de Green, prove que
$$\oint_C ydx + xdy = 0.$$

5. Suponha que o vector $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ é paralelo ao vector tangente à curva fechada C.

   a) Mostre que $(Q(x, y), -P(x, y))$ é perpendicular ao vector tangente.

   b) Mostre que $\displaystyle\iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdy = 0$, onde D é a região limitada pela curva C.

6. Seja C uma curva fechada simples e D a região limitada por C. Utilize o Teorema de Green para mostrar que a área de D é dada por
$$\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx.$$

7. Usando o exercício anterior determine a área da:

   a) circunferência de raio R.

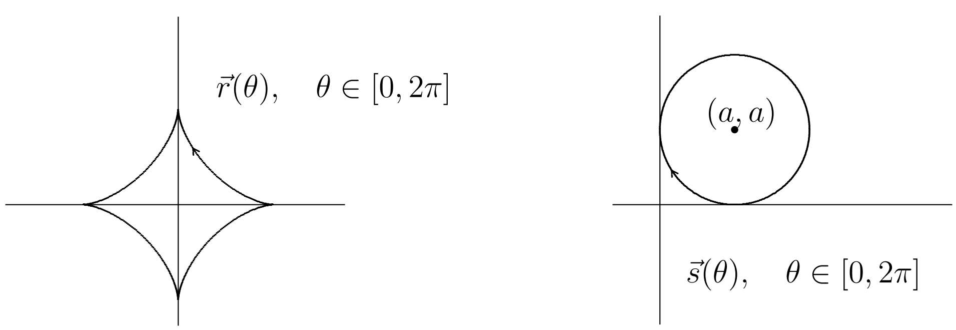
   b) elipse de semi-eixos a e b.

   c) região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$.

8. Utilizando o Teorema de Green, determine a área da região limitada pela curva, cuja parametrização é dada por:

   a) $\vec{r}(\theta) = (a\cos^3\theta, a\ \mathrm{sen}^3\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$, onde $a \in \mathbb{R}$.

   b) $\vec{s}(\theta) = (a(1 - \mathrm{sen}\,\theta), a(1 - \cos\theta))$, com $\theta \in [0, 2\pi]$, onde $a > 0$.



9. Seja C a fronteira de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geqslant 1\ ,\ x^2+y^2 \leqslant 9\}$, orientada de modo que a região D esteja sempre à esquerda da curva C. Usando o Teorema de Green, calcule

$$\int_C (x^3-y^3)dx + (x^3+y^3)dy.$$

10. Considere a área D limitada pela parábola $x^2 = 2y+4$ e pela recta $y = 2$. Utilize o Teorema de Green para calcular

$$\int_\Gamma \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

onde Γ é a fronteira de D, percorrida no sentido directo.

11. Considere o quadrado $D = [-2,2] \times [-2,2]$. Aplique o Teorema de Green para calcular

$$\int_\Gamma \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}dy,$$

onde Γ é a fronteira de D, percorrida no sentido negativo.

12. Considere o campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

a) Mostre que $\int_C \vec{F} = 2\pi$, para qualquer curva fechada simples C orientada no sentido positivo, cuja área por ela limitada contenha a origem.

b) Mostre que $\int_C \vec{F} = 0$, para qualquer curva fechada simples C, cuja área por ela limitada não contenha a origem.

13. O seguinte exercício fornece uma forma de calcular a área de um polígono qualquer.

a) Mostre que

$$\int_C xdy - ydx = a_1b_2 - a_2b_1,$$

onde C é o segmento de recta com início em (a_1,b_1) e final em (a_2,b_2).

b) Considere o polígono D cujos vértices são $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ ordenados no sentido directo. Mostre que a área de D é metade de

$$(a_1b_2 - a_2b_1) + (a_2b_3 - a_3b_2) + \cdots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}) + (a_nb_1 - a_1b_n).$$

c) Calcule a área do polígono com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$ e $(-1, 1)$.