



Universidade Fernando Pessoa  
Departamento de Ciências e Tecnologia  
**Exame de Análise Matemática III**  
*Exame época especial trabalhador-estudante*  
**Eng<sup>a</sup> do Ambiente e Eng<sup>a</sup> Civil**  
1 de Setembro de 2000

Instruções:

- A duração desta prova é de **2 horas** com **30 minutos** de tolerância.
  - Não é permitido o uso de calculadoras ou escrever a lápis.
  - Leia as questões **ATENTAMENTE**.
  - Apresente **todos os cálculos** que efectuar, **JUSTIFICANDO** devidamente as respostas.
  - **Responda em folhas SEPARADAS aos grupos I e II.**
- 

**Grupo I**

1. Defina, de forma completa, os seguintes conceitos:
  - a) (0,5 valores) **Equação diferencial** de ordem  $n$ .
  - b) (0,5 valores) **Solução geral** de uma equação diferencial **linear não homogénea** de ordem  $n$ .
  - c) (0,5 valores) **Solução particular** de uma equação diferencial **linear não homogénea** de ordem  $n$ .
2. (3 valores) Aplique os dois teoremas que conhece para encontrar um factor integrante na resolução do problema de valor inicial  $2xydx + (4y + 3x^2)dy = 0$ ,  $y(0,2) = -1,5$ . Explique convenientemente todos os passos.
3. (2 valores) Resolva o problema de valor inicial  $y' = \frac{y}{x} + \frac{2}{y}x^3 \cos x^2$ ,  $y(\sqrt{\pi}) = 0$ . Indique, justificando convenientemente, de que tipo de equação diferencial se trata, e qual a sua ordem.
4. (4,5 valores) Encontre uma solução geral para a equação diferencial  $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \sqrt{2x}e^{2x}$ . Utilize o método de variação de parâmetros. Descreva pormenorizadamente os passos efectuados e classifique a equação diferencial inicial.



## Grupo II

5.

a) (2 valores) Utilizando os teoremas da transformada de Laplace da derivada e/ou do integral, mostre que

$$\mathbf{L}\{t \cos \omega t\} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

b) (1,5 valores) Utilize a fórmula facultada na questão anterior para mostrar que

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}\right\} = \frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t).$$

6. (1,5 valores) Determine a função inversa da seguinte transformada de Laplace:  $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}$ .

7. (2,5 valores) Utilizando transformadas de Laplace, resolva a seguinte equação diferencial:

$$y'' - 2y' + y = e^t + t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

8. (1,5 valores) Represente a seguinte função em termos de função escalão unitário e encontre a sua transformada de Laplace:

