



**Universidade Fernando Pessoa**  
**Departamento de Ciência e Tecnologia**  
Exame da época de recurso do 1º semestre 1999/07/02  
**Análise Matemática III**

Curso de **Engenharia Civil** – 2º ano  
Curso de **Engenharia do Ambiente** – 2º ano

Duração: 2 h  
Tolerância: 30 min

**Nota:** Apresente todos os cálculos que efectuar, **JUSTIFICANDO** devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular. Não pode escrever a lápis. Responda à QUESTÃO nº **IV** em folhas separadas. Evite inverter a ordem das questões. Leia todas as questões **ATENTAMENTE!** Este é um teste de Matemática: certifique-se daquilo que está a fazer! Não serão aceites suposições.

**I.** Encontre uma solução geral para a seguinte equação diferencial  $y' = \frac{y-x}{y+x}$ .

**II.** Aplique o método de iteração de *Picard* ao seguinte problema de valor inicial, efectuando pelo menos três iterações. Determine ainda a solução exacta.

$$y' - xy = 1, \quad y(0) = 1$$

**III.** Na tentativa de encontrar uma base de soluções, pode frequentemente encontrar-se uma solução por observação ou por algum outro método.

Seja  $y_1$  uma solução de  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  num intervalo  $I$ . Diga em que consiste o método que conhece e deduza a expressão que lhe permite encontrar a partir de  $y_1$  uma segunda solução  $y_2$ .

Em relação a  $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$ ,  $y_1 = x^{-1/2} \cos x$ ,  $x > 0$ :

Mostre que a função  $y_1$  dada é uma solução da equação dada. Utilize o método anterior para encontrar  $y_2$ , tal que  $y_1, y_2$  formem uma base (prove!).

IV. Resolva o seguinte problema de valor inicial sem aplicação de transformadas de Laplace:

$$(x^3 D^3 + x^2 D^2 - 2xD + 2)y = x^3 \ln x, \quad y(1) = \frac{25}{32}, \quad y'(1) = \frac{47}{32}, \quad y''(1) = \frac{21}{16}$$

Determine se a  $y_p$  a que chegou está correcta!!!

V. Leia com atenção as seguintes questões e responda pormenorizadamente a cada uma delas:

- (a) Em que consiste o princípio da linearidade ou superposição? Em que condições se aplica?
- (b) Como é que a independência e dependência de  $n$  funções é definida? Qual é a importância destes conceitos no Capítulo das equações diferenciais de ordem  $n$ ?
- (c) O que é o Wronskiano? Qual é o seu significado?
- (d) Discuta as vantagens e desvantagens do método dos coeficientes indeterminados e do método de variação de parâmetros. Quando se aplica cada um e em que condições?
- (e) Em que consiste a regra da modificação e quando é que é aplicável?

VI. Encontre  $f(t)$  se  $\mathcal{L}(f)$  for igual a  $\frac{1}{s^4(s^2 + \pi^2)}$ .

Questão	Cotação
I	25
II	25
III	30
IV	65
V.a	5
V.b	5
V.c	5
V.d	5
V.e	5
VI	30
<b>Total:</b>	200

Bom trabalho! Prof: Alzira Dinis