Universidade Fernando Pessoa
Departamento de Ciência e Tecnologia
Exame da época trabalhador-estudante **2001/09/04**
Análise Matemática III

Engenharia Civil, do Ambiente, da Qualidade – 2º ano

Duração: 2 h
Tolerância: 30 min

Nota: Apresente todos os cálculos que efectuar, **JUSTIFICANDO** devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular. Não pode escrever a lápis. Evite inverter a ordem das questões. Leia todas as questões **ATENTAMENTE**! Não serão aceites suposições.

- **Responda em folhas SEPARADAS aos grupos I e II.**

Grupo I

1. (0,75 valores cada alínea) Na atmosfera, a quantidade de carbono radioactivo ${}_6C^{14}$ é constante e o mesmo se verifica para os organismos vivos. Quando um ser vivo morre termina a absorção de ${}_6C^{14}$ pela alimentação e respiração. Pode então estimar-se a idade de um fóssil comparando a quantidade de carbono ${}_6C^{14}$ no fóssil com a quantidade existente na atmosfera. Sabendo que o modelo matemático do processo de perda de ${}_6C^{14}$ pelo fóssil é descrito pela equação $y' = ky$ (onde $y(t)$ é a quantidade ${}_6C^{14}$ ao fim do tempo t e $k = -0.000121$ para o ${}_6C^{14}$).

a) Mostre que a solução da equação é da forma $y(t) = y_0 e^{kt}$ onde y_0 é a quantidade ínicial de ${}_6C^{14}$.

b) Determine a idade de um fóssil cuja quantidade de ${}_6C^{14}$ é de apenas 25% da existente na atmosfera.

c) Qual a percentagem de ${}_6C^{14}$ existente num fóssil que se sabe ter 2000 anos.

2. Considere a seguinte equação diferencial:

$$(3xe^{y} + 2y)dx + (x^2 e^{y} + x)dy = 0$$

a) (0,75 valores) Mostre que não é exacta.

b) (1 valor) Encontre um factor integrante que torne a equação exacta.

Maria Alzira Dinis
Pedro Sobral

c) (1,5 valores) Resolva-a, verificando a solução que obtiver.

3. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

a) (0,5 valores) Se $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{-x}$ são soluções da equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então $y_3(x) = 3e^x + 5e^{-x}$ também é solução dessa equação.

b) (3,5 valores) As funções $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$, $y_3(x) = x^2e^{-x}$ e $y_4(x) = e^{2x}$ são soluções da equação diferencial $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$ e formam uma base para o espaço de soluções dessa equação em qualquer intervalo aberto.

c) (0,5 valores) As funções $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = \frac{2e^x}{3}$ são linearmente independentes.

Grupo II

4. (2,5 valores) Utilize o método de variação de parâmetros para encontrar a solução geral da equação não homogenea:

$$y'' - 2y' + y = x^{\frac{3}{2}}e^x$$

5. (2,5 valores) Sabendo que $L(y'') = s^2L(y) - sy(0) - y'(0)$, determine a transformada de Laplace da função $y(t) = t.Sin(wt)$.

6. (2 valores) Sabendo que $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$, determine $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\left(\frac{s+1}{s^2+1}\right)\right\}$

7. (3 valores) Resolva, utilizando Transformadas de Laplace a seguinte equação diferencial com condições iníciais. Indique apenas a solução relativa à parte de $0 < t < \pi$ (2º teorema do desvio).

$$y'' + 4y = r(t) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

$$r(t) = \begin{cases} 3Sen(t), & 0 < t < \pi \\ -3Sen(t), & t > \pi \end{cases}$$

Maria Alzira Dinis
Pedro Sobral