Universidade Fernando Pessoa
Departamento de Ciências e Tecnologia
*Exame de Análise Matemática **III***
5 de Fevereiro de 2000

Instruções:

- A duração desta prova é de **2 horas**.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- **Responda em folhas SEPARADAS aos grupos I e II**.

Grupo I

1) Defina de forma completa:

   a) (0,5 valores) Solução de uma equação diferencial de ordem **n**.
   b) (0,5 valores) Solução implícita de uma equação diferencial, por oposição a solução explícita.
   c) (0,5 valores) Factor integrante.

2) Considere a equação diferencial:

$$2xy\,dx + (4y + 3x^2)dy = 0$$

   a) (1 valor) Mostre que não é exacta.
   b) (1 valor) Encontre um factor integrante que torne a equação exacta.
   c) (1 valor) Resolva-a, verificando a solução que obtiver.

3) (2 valores) Utilize o método de Picard à equação $y' = y,\ y(0) = 1$ e mostre que as sucessivas aproximações (determine y_0, y_1, y_2, y_3 e y_4) tendem para $y = e^x$, a solução exacta[1]

4) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

   a) (1 valor) Se $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{-x}$ são soluções da equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, então $y_3(x) = 3e^x + 5e^{-x}$ também é solução dessa equação.

   b) (1 valor) As funções $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$ e $y_3(x) = x^2e^{-x}$ são soluções da equação diferencial $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ e formam uma base para o espaço de soluções dessa equação em qualquer intervalo aberto.

   c) (1 valor) As funções $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = 2e^x$ não são linearmente independentes.

5) (2 valores) O método de redução de ordem, que se aplica desde as equações diferenciais de 2ª ordem até às equações diferenciais de ordem n é muito simples no caso das equações homogéneas com coeficientes constantes. Sabendo que $y_1 = e^{-2x}$ é uma solução da equação $y''' + 4y'' + 6y' + 4y = 0$ encontre a sua solução geral.

---

[1] Compare as aproximações sucessivas com a fórmula de Taylor da exponencial (ordem **n** em torno do ponto **0**)

Grupo II

6) (2,5 valores) Utilize o método de variação de parâmetros para encontrar a solução geral da equação não homogénea:

$$y''+y=\frac{1}{Cos(x)}$$

7) (2 valores) Sabendo que $L(y'')=s^2L(y)-sy(0)-y'(0)$, determine a transformada de Laplace da função $y(t)=sen^2(t)$.

8) (1,5 valores) Encontre a antitransformada de Laplace da seguinte função: $F(s)=\frac{e^{-2s}-e^{-4s}}{s-2}$

9) (2,5 valores) Resolva utilizando Transformadas de Laplace a seguinte equação diferencial com condições iniciais:

$$y''+2y'+5y=9cosh(2t)+4senh(2t) \quad y(0)=1,\ y'(0)=2$$

Maria Alzira Dinis
Pedro Sobral