Universidade Fernando Pessoa
Departamento de Ciências e Tecnologia
*Exame de Recurso - Análise Matemática **III***
5 de Julho de 2000

Instruções:

- A duração desta prova é de **2 horas** com **30** minutos de tolerância.
- Não é permitido o uso de calculadoras.
- **Responda em folhas SEPARADAS aos grupos I e II**.

Grupo I

1) Na atmosfera, a quantidade de carbono radioactivo ${}_6C^{14}$ é constante e o mesmo se verifica para os organismos vivos. Quando um ser vivo morre termina a absorção de ${}_6C^{14}$ pela alimentação e respiração. Pode então estimar-se a idade de um fóssil comparando a quantidade de carbono ${}_6C^{14}$ no fóssil com a quantidade existente na atmosfera. Sabendo que o modelo matemático do processo de perda de ${}_6C^{14}$ pelo fóssil é descrito pela equação $y' = ky$ (onde $y(t)$ é a quantidade ${}_6C^{14}$ ao fim do tempo t e $k = -0.000121$ para o ${}_6C^{14}$).

- **a)** (1 valor) Mostre que a solução da equação é da forma $y(t) = y_0 e^{kt}$ onde y_0 é a quantidade inicial de ${}_6C^{14}$.
- **b)** (1 valor) Determine a idade de um fóssil cuja quantidade de ${}_6C^{14}$ é de apenas 25% da existente na atmosfera.
- **c)** (1 valor) Qual a percentagem de ${}_6C^{14}$ existente num fóssil que se sabe ter 2000 anos.

2) Diga se algum dos conjuntos seguintes poderá dar origem à solução geral de uma equação diferencial ordinária linear (EDOL) normal e homogénea:

- **a)** (1 valor) $\{1+x,\ 2-2x,\ 4-x\}$
- **b)** (1 valor) $\{6x^2,\ 14x^2,\ 2x\}$

3) (2 valores) Generalizando o método já estudado, deduza a equação auxiliar para uma equação diferencial de Euler-Cauchy de quinta ordem, $x^5 y^{V} + ax^4 y^{IV} + bx^3 y''' + cx^2 y'' + dxy' + ey = 0$, e demostre que $y = x^m$ é uma solução da equação de Euler-Cauchy de quinta ordem se e somente se m for uma raíz da respectiva equação auxiliar.

4) (2 valores) Verifique que a função $F = e^{xy}$ é um factor integrante e resolva o problema de valor inicial $\left(1+xy\right)dx + x^2 dy = 0, \quad y(1) = 0$.

Grupo II

5) (2 valores)) Mostre, pela definição de transformada de Laplace, que $L(y') = sL(y) - y(0)$.

6) (2 valores) Utilizando o teorema da questão anterior determine a transformada de Laplace da função $y(t) = te^{at}$.

7) (2 valores) Sabendo que $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(\eta)d\eta$, determine $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\left(\frac{s+1}{s^2+1}\right)\right\}$

8) (2 valores) Determine $f(t)$ sabendo que $F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2} - \frac{4e^{-2s}}{s} + \frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}$.

9) (3 valores) Resolva utilizando Transformadas de Laplace a seguinte equação diferencial com condições iniciais:

$$y'' + 6y' + 8y = -e^{-3t} + 3e^{-5t}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -14$$

Maria Alzira Dinis
Pedro Sobral