Universidade Fernando Pessoa

Exame **1998/01/10**

Análise Matemática III

Curso de **Engenharia das Construções Civis -** Época especial trabalhador-estudante

Duração: 2 h

Tolerância: 30 min

Nota: Apresente <u>todos</u> os cálculos que efectuar, <u>justificando</u> devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular.

1. Determinadas equações diferenciais de primeira ordem não são separáveis mas podem ser transformadas nestas através de uma simples mudança de variável. Se tivermos uma equação do tipo $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$, onde g é uma qualquer função de $\frac{y}{x}$, explique, deduzindo o método a seguir, como proceder nestes casos. Seguindo o método que indicou resolva depois a equação diferencial seguinte: $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$.

2. Aplique o método de Picard a $y' = 2xy, \quad y(0) = 1$. Calcule os valores $y_1(1)$, $y_2(1)$ e $y_3(1)$, e compare-os com o valor exacto $y(1) = e = 2{,}718\ldots$. Justifique a resposta.

3. Verifique directamente que no caso de uma raíz dupla, $xe^{\lambda x}$ com $\lambda = -a/2$ é uma solução de $y'' + ay' + by = 0$. Atenção: não pode verificar que $y'' + ay' + by = 0$ tem como solução $xe^{\lambda x}$ com $\lambda = -a/2$!!

4. A continuidade de p e q implica que a equação homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ tem uma solução geral $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ em I. O método de variação de parâmetros implica substituir as constantes c_1 e c_2 - aqui consideradas como *parâmetros* em y_h - por funções $u(x)$ e $v(x)$ a serem determinadas de modo a que a função resultante $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ seja uma solução particular de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ em I. Deduza o método de variação de parâmetros para uma equação diferencial de segunda ordem.

5. Através da aplicação do método dos coeficientes indeterminados resolva o seguinte problema de valor inicial: $y^{IV} - 5y'' + 4y = 10\cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$.

6. Utilizando transformadas de Laplace, resolva $y'' + 6y' + 8y = -e^{-3t} + 3e^{-5t}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -14$.

Prof: Alzira Dinis