Universidade Fernando Pessoa

Exame **1997/02/13**

Análise Matemática III

Curso de **Engenharia das Construções Civis -** 2º ano

Duração: 2 h

Nota: Apresente todos os cálculos que efectuar, justificando devidamente as respostas.

1. Resolva, reduzindo à forma de variáveis separadas, o seguinte problema de valor inicial $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{2x^3 \cos x^2}{y}$, $y(\sqrt{\pi}) = 0$, indicando - justificando convenientemente - qual a ordem da equação diferencial linear homogénea inicial.

2. Aplicando o primeiro teorema sobre factores integrantes, encontre um factor integrante e resolva a seguinte equação diferencial: $2\cos \pi y dx = \pi \sin \pi y dy$

3. Aplique o método de Picard a $y' = x + y$, $y(0) = -1$, encontrando com base nas sucessivas iterações - tantas quanto achar necessário - $y_n(x)$.

4. Verifique que a seguinte função $y = c_1 e^{-(\alpha - i\omega)x} + c_2 e^{-(\alpha + i\omega)x}$ é solução da equação diferencial $y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + \omega^2)y = 0$ e obtenha a partir dela uma solução geral com valores reais da forma $y = e^{-ax/2}(A\cos \omega x + B \sin \omega x)$.

5. Mostre que as funções $\cos x$, $\sin x$, e^{-x} formam uma base de soluções da equação diferencial $(D^3 + D^2 + D + 1)y = 0$ num intervalo aberto e verifique, justificando, a independência linear pelo teorema da dependência e independência linear de soluções.

6. Utilize o método de variação de parâmetros para encontrar uma solução geral para a seguinte equação diferencial não homogénea de Euler-Cauchy: $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^{-2}$.

7. Utilizando transformadas de Laplace, mostre que o seguinte problema de valor inicial $y'' + 25y = t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0,04$ tem por solução $y(t) = \cos 5t + \frac{1}{25}t$.

8. Sabendo que $L(f'') = s^2 L(f) - sf(0) - f'(0)$, deduza a seguinte transformada: $L(t \cosh at) = \frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$.

9. Verifique que a seguinte função: $u = \arctan(y/x)$ é solução da equação de Laplace.

10. Mostre que $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é uma solução da equação tridimensional $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Diga de que equação se trata.

Prof: Alzira Dinis