



Universidade Fernando Pessoa
Departamento de Ciências e Tecnologia
Exame de Análise Matemática III
Exame da época finalista 2001/09/18

Instruções:

- Apresente todos os cálculos que efectuar, **JUSTIFICANDO** devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular. Não pode escrever a lápis. Evite inverter a ordem das questões. Leia todas as questões **ATENTAMENTE!** Não serão aceites suposições.
- A duração desta prova é de **2 horas** com 30 min de tolerância.
- **Responda em folhas SEPARADAS aos grupos I e II.**

Grupo I

1) Defina de forma completa:

- a) (0,5 valores) Solução de uma equação diferencial de ordem n .
- b) (0,5 valores) Solução implícita de uma equação diferencial, por oposição a solução explícita.
- c) (0,5 valores) Factor integrante.

2) Considere a equação diferencial:

$$2xy dx + (4y + 3x^2)dy = 0$$

- a) (1 valor) Mostre que não é exacta.
- b) (1 valor) Encontre um factor integrante que torne a equação exacta.
- c) (1 valor) Resolva-a, verificando a solução que obtiver.

2) (2 valores) Utilize o método de Picard à equação $y' = y$, $y(0) = 1$ e mostre que as sucessivas aproximações (determine y_0, y_1, y_2, y_3 e y_4) tendem para $y = e^x$, a solução exacta¹

4) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

- a) (1 valor) Se $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{-x}$ são soluções da equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, então $y_3(x) = 3e^x + 5e^{-x}$ também é solução dessa equação.
- b) (1 valor) As funções $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$ e $y_3(x) = x^2e^{-x}$ são soluções da equação diferencial $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ e formam uma base para o espaço de soluções dessa equação em qualquer intervalo aberto.
- c) (1 valor) As funções $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = 2e^{-x}$ não são linearmente independentes.

5) (2 valores) O método de redução de ordem, que se aplica desde as equações diferenciais de 2ª ordem até às equações diferenciais de ordem n é muito simples no caso das equações homogêneas com coeficientes constantes. Sabendo que $y_1 = e^{-2x}$ é uma solução da equação $y''' + 4y'' + 6y' + 4y = 0$ encontre a sua solução geral.

¹ Compare as aproximações sucessivas com a fórmula de Taylor da exponencial (ordem n em torno do ponto 0)

Grupo II

- 6) (2,5 valores) Utilize o método de variação de parâmetros para encontrar a solução geral da equação não homogênea:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$$

- 7) (2 valores) Sabendo que $L(y'') = s^2 L(y) - sy(0) - y'(0)$, determine a transformada de Laplace da função $y(t) = \sin^2(t)$.

- 8) (1,5 valores) Encontre a antitransformada de Laplace da seguinte função: $F(s) = \frac{e^{-2s} - e^{-4s}}{s - 2}$

- 9) (2,5 valores) Resolva utilizando Transformadas de Laplace a seguinte equação diferencial com condições iniciais:

$$y'' + 2y' + 5y = 9\cosh(2t) + 4\sinh(2t) \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$$