



Universidade Fernando Pessoa

Exame 1997/11/22

Análise Matemática III

Curso de **Engenharia das Construções Cívicas** - Época especial

Duração: 2 h

Nota: Apresente todos os cálculos que efectuar, justificando devidamente as respostas.

1. Se $y' + p(x)y = r(x)$ é uma equação diferencial ordinária linear (EDOL) não homogénea de primeira ordem e $y' + p(x)y = g(x)y^a$ for a equação de Bernoulli na forma não linear, obtenha a forma linear da equação de Bernoulli $u' + (1-a)pu = (1-a)g$. Utilizando a equação de Bernoulli na forma linear, resolva depois a equação de Verhulst na forma não linear, $y' - Ay = -By^2$, transformando-a primeiramente de forma que passe a estar na forma linear $u' + Au = B$, para só então obter a partir desta a Lei Logística do crescimento populacional:

$$y = \frac{1}{\frac{B}{A} + ce^{-Ax}}.$$

2. Verifique se as funções $\cosh x$, $\sinh x$, $\cos x$ e $\sin x$ formam uma base de soluções da equação diferencial $y^{IV} - y = 0$ num intervalo aberto, averiguando a independência linear através do cálculo do wronskiano $W(\cosh x, \sinh x, \cos x, \sin x)$.

3.

- 3.1. A equação de Euler-Cauchy de terceira ordem é $x^3 y''' + ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$.

Mostre que $y = x^m$ é uma solução da equação se e somente se m for uma raiz da respectiva equação auxiliar, que terá que deduzir.

3.2. Resolva a equação $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$.

4. Resolva o seguinte problema de valor inicial $y^{IV} - 5y'' + 4y = 10 \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$, através da utilização do método dos coeficientes indeterminados.

5. Encontre, pela utilização do método de variação de parâmetros, uma solução geral para a equação diferencial $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^{\frac{1}{2}} e^x$.

6. Representando as funções hiperbólicas em termos de funções exponenciais e aplicando o primeiro teorema do desvio, mostre que

$$L(\cosh at \cos at) = \frac{s^3}{s^4 + 4a^4}.$$