Universidade Fernando Pessoa

Departamento de Ciência e Tecnologia

Exame da época finalistas **1999/11/22**

Análise Matemática III

Curso de **Engenharia Civil** – 2º ano

Curso de **Engenharia do Ambiente**– 2º ano

Duração: 2 h

Tolerância: 30 min

Nota: Apresente todos os cálculos que efectuar, **JUSTIFICANDO** devidamente as respostas. Não pode utilizar qualquer material de consulta ou máquina de calcular. Não pode escrever a lápis. Evite inverter a ordem das questões. Leia todas as questões **ATENTAMENTE**! Este é um teste de Matemática: certifique-se daquilo que está a fazer! Não serão aceites suposições.

1. Na atmosfera, a quantidade de carbono radioactivo ${}_6C^{14}$ é constante e o mesmo se verifica para os organismos vivos. Quando um ser vivo morre termina a absorção de ${}_6C^{14}$ pela alimentação e respiração. Pode então estimar-se a idade de um fóssil comparando a quantidade de carbono ${}_6C^{14}$ no fóssil com a quantidade existente na atmosfera. Sabendo que o modelo matemático do processo de perda de ${}_6C^{14}$ pelo fóssil é descrito pela equação $y' = ky$ (onde $y(t)$ é a quantidade ${}_6C^{14}$ ao fim do tempo t e $k = -0.000121$ para o ${}_6C^{14}$).

a) Mostre que a solução da equação é da forma $y(t) = y_0 e^{kt}$ onde y_0 é a quantidade ínicial de ${}_6C^{14}$.

b) Determine a idade de um fóssil cuja quantidade de ${}_6C^{14}$ é de apenas 25% da existente na atmosfera.

c) Qual a percentagem de ${}_{6}C^{14}$ existente num fóssil que se sabe ter 2000 anos.

2. Considere a seguinte equação diferencial:

$$(3xe^{y} + 2y)dx + (x^2 e^{y} + x)dy = 0$$

a) Mostre que não é exacta.

b) Encontre um factor integrante que torne a equação exacta.

c) Resolva-a, verificando a solução que obtiver.

3. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

a) Se $y_1(x) = e^{x}$ e $y_2(x) = e^{-x}$ são soluções da equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, então $y_3(x) = 3e^{x} + 5e^{-2x}$ também é solução dessa equação.

b) As funções $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{x}$, $y_3(x) = e^{-2x}$ e $y_4(x) = e^{2x}$ são soluções da equação diferencial $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$ e formam uma base para o espaço de soluções dessa equação em qualquer intervalo aberto.

c) As funções $y_1(x) = e^{x}$ e $y_2(x) = \frac{2e^{x}}{3}$ são linearmente independentes.

4. Utilize o método de variação de parâmetros para encontrar a solução geral da equação não homogenea:

$$y'' - 2y' + y = x^{\frac{3}{2}} e^{x}$$

5. Sabendo que $L(y'') = s^2 L(y) - sy(0) - y'(0)$, determine a transformada de Laplace da função $y(t) = t.Sin(wt)$.

6. Sabendo que $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$, determine $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\left(\frac{s+1}{s^2+1}\right)\right\}$

7. Resolva, utilizando Transformadas de Laplace a seguinte equação diferencial com condições iníciais. Indique apenas a solução relativa à parte de $0 < t < \pi$ (2º teorema do desvio).

$$y''+4y = r(t) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

$$r(t) = \begin{cases} 3Sen(t), & 0 < t < \pi \\ -3Sen(t), & t > \pi \end{cases}$$

Questão	Cotação (para 200)
1.a./b./c./	7,5 cada
2.a.	7,5
2.b.	10
2.c.	15
3.a.	5
3.b.	35
3.c.	5
4.	25
5.	25
6.	20
7.	30

Bom trabalho! Prof. Alzira Dinis

Prof. Pedro Sobral