Universidade Fernando Pessoa
Departamento de Ciência e Tecnologia

Apontamentos

de

ANÁLISE MATEMÁTICA III

Maria Alzira Pimenta Dinis

1998

Índice

Capítulo I

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

(EDO)

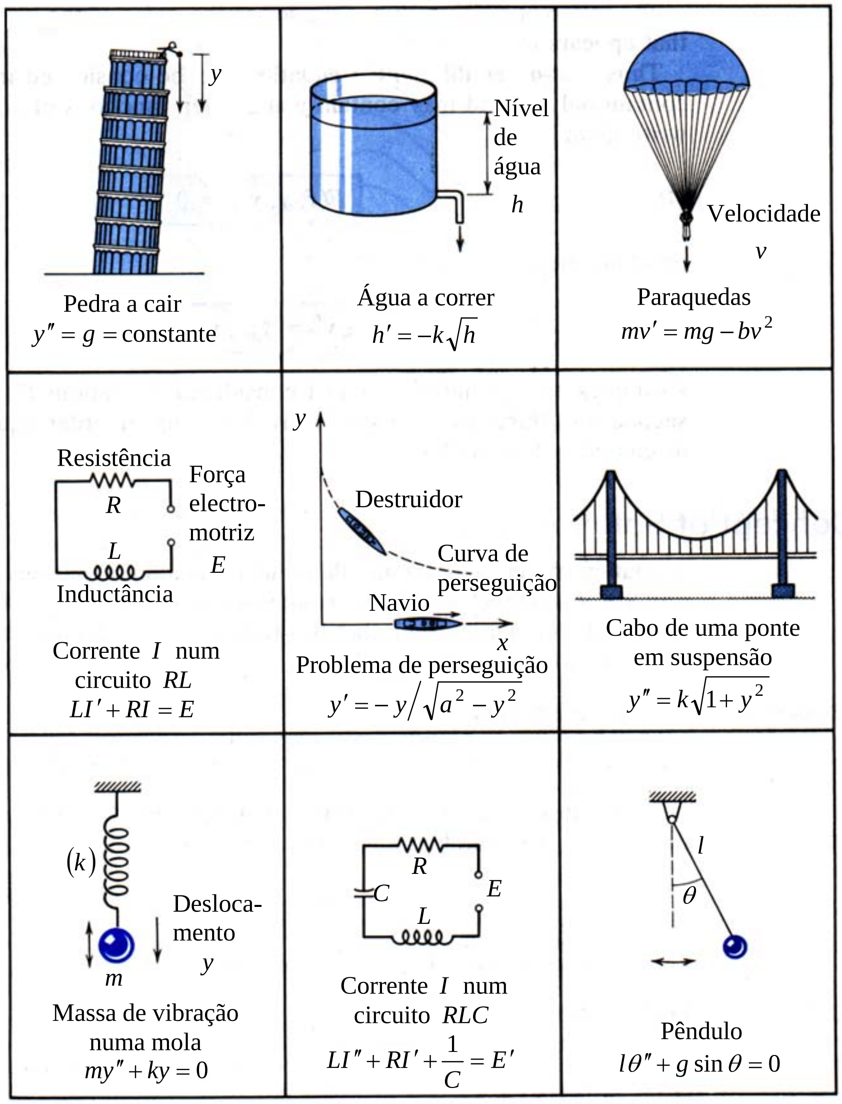
Capítulo I

Uma equação diferencial ordinária é uma equação que contém uma ou várias derivadas de uma função desconhecida, a que chamamos $y(x)$ e que queremos determinar a partir da equação; a equação pode também conter a própria função y bem como funções e constantes dadas.

Exemplo - $y' = \cos x$; $y'' + 4y = 0$ e $x^2 y''' y' + 2e^x y'' = \left(x^2 + 2\right) y^2$ são exemplos de equações diferenciais ordinárias.

A palavra *ordinária* distingue estas equações das *equações diferenciais parciais*, nas quais a função desconhecida depende apenas de duas ou mais variáveis. As equações diferenciais aparecem em muitas aplicações de Engenharia e também em aplicações de sistemas físicos e outros, envolvendo modelos matemáticos. Um exemplo simples pode ser resolvido recorrendo a conhecimentos adquiridos em *Análise Matemática*. Por exemplo, se uma população – de humanos, animais, bactérias, etc – cresce a uma taxa $y' = dy/dx$ (x = tempo) igual à população $y(x)$ presente, o modelo populacional é $y' = y$, que é uma equação diferencial. Se nos lembrarmos da *Análise* que $y = e^x$ (ou mais geralmente $y = ce^x$) tem a propriedade $y' = y$, obtivemos uma solução do nosso problema.

Como outro exemplo, se deixarmos cair uma pedra, então a sua aceleração $y'' = d^2y/dx^2$ (x = tempo, como antes) é igual à aceleração da gravidade g (uma constante). Assim, o modelo deste problema de *queda livre* é $y'' = g$, com boa aproximação, uma vez que a resistência do ar não tem muito interesse neste caso. Por integração, obtemos a velocidade $y' = dy/dx = gx + v_0$, onde v_0 é a velocidade inicial com que o movimento foi iniciado (ex: $v_0 = 0$). Integrando novamente calcula-se a distância percorrida $y = \frac{1}{2} gx^2 + v_0 x + y_0$, onde y_0 é a distância a partir do ponto inicial (ex: $y_0 = 0$). Modelos mais complicados, como os que se indicam na figura que se segue, necessitam de métodos mais refinados para a sua resolução.



Começemos por classificar as equações diferenciais de acordo com a sua *ordem*: A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação. Assim, as *equações diferenciais de primeira ordem* contém apenas y' e podem conter y e funções de x; podemos então escrever $F(x, y, y') = 0$ ou por vezes $y' = f(x, y)$.

<u>Exemplo</u> - $y' + x = 0$ é uma equação diferencial de 1ª ordem; $xy'' - 3xy' + y - x^2 = 0$ é uma equação diferencial de 2ª ordem; $(y''')^2 - 4y'' - 2y = 0$ é uma equação diferencial de 3ª ordem.

Conceito de Solução.

Uma solução de uma equação diferencial de primeira ordem num intervalo $a < x < b$ é uma função $y = h(x)$ que tem uma derivada $y' = h'(x)$ e satisfaz $F(x, y, y') = 0$ para todo o x pertencente ao intervalo; isto é, $F(x, y, y') = 0$ torna-se uma identidade se substituirmos a função desconhecida y por h e y' por h'.

Exemplo – Verifique que $y = x^2$ é uma solução de $xy' = 2y$ para todo o x.

Na verdade, $y' = 2x$, e por substituição, $xy' = x(2x) = 2y = 2x^2$, uma identidade em x.

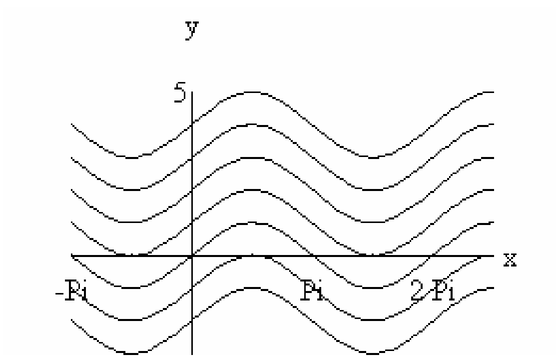
Por vezes uma solução de uma equação diferencial aparecerá como uma função implícita, isto é, implicitamente dada na forma $H(x, y) = 0$ e é chamada uma *solução implícita* em constraste com uma *solução explícita* $y = h(x)$.

Exemplo – A função y de x implicitamente dada por $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ($y > 0$), representando um semicírculo de raio unitário no meio-plano superior, é uma solução implícita da equação diferencial $yy' = -x$ no intervalo $-1 < x < 1$. Prove-o.

Uma vez que y é definida implicitamente, temos que derivar implicitamente a função $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$. Então $yy' = y\left(-\frac{x}{y}\right) = -x$.

Veremos de seguida que uma equação diferencial pode ter - e em geral terá – muitas soluções. Este facto não é surpreendente se pensarmos que, dos conhecimentos que temos de *Análise Matemática*, a integração introduz constantes arbitárias.

Exemplo – A equação $y' = \cos x$ pode ser resolvida analiticamente. Da integração resultam curvas do seno $y = \sin x + c$ com c arbitrário. Cada c permite obter uma curva, e estas são todas as soluções possíveis que podemos obter analiticamente. A figura seguinte mostra algumas das cuvas possíveis de obter para $c = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.



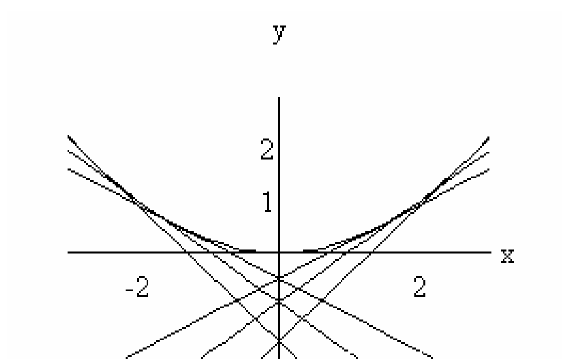
Este exemplo, simples, é típico de muitas equações de primeira ordem. Ilustra que todas as soluções são representadas por uma única fórmula envolvendo uma constante arbitrária c. É usual chamar a tal função envolvendo uma constante arbitrária uma *solução geral* de uma equação diferencial de 1ª ordem. Se escolhermos um determinado valor para c (ex: c=2 ou 0 ou $-5/3$, etc) obtém-se uma *solução particular* da equação. Assim, $y = \sin x + c$ é uma solução geral de $y' = \cos x$, e $y = \sin x$, $y = \sin x - 2$, $y = \sin x + 0{,}75$, etc, são soluções particulares.

Uma equação diferencial pode por vezes ter uma solução adicional que não pode ser obtida da solução geral e é então chamada uma *solução singular*. Por exemplo, $y'^2 - xy' + y = 0$ tem a solução geral $y = cx - c^2$, como pode comprovar-se por diferenciação e substituição: Se $c = 1 \Rightarrow y = cx - c^2 = x - 1$. Então $y' = 1$ e $y'2 - xy' + y = 1^2 - x \times 1 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, Se $c = 2 \Rightarrow y =$ $= 2x - 2^2 = 2x - 4$. Então $y' = 2$ e $y'^2 - xy' + y = 2^2 - x \times 2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4 - 2x + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, etc. $y = cx - c^2$ representa uma família de linhas rectas, uma linha para cada c. São estas as soluções particulares que se mostram na figura. A substituição mostra também que a parábola $y = x^2/4$ é também uma solução. Vejamos: Se $y = x^2/4$ então

$y' = \dfrac{x}{2}$ e $y'^2 - xy' + y =$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^2 - x\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2_{(2)}} +$$

$$+ \frac{x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x^2 + x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$



Esta é uma solução singular de $y'^2 - xy' + y = 0$ porque não a podemos obter de $y = cx - c^2$ através de um c adequado.

As condições sob as quais uma determinada equação diferencial tem soluções são bastante gerais. Existem no entanto equações relativamente simples que não têm solução e outras que não têm uma solução geral.

<u>Exemplo</u> - A equação $y'^2 = -1$ não tem solução para y real – não é possível derivar uma função real tal que da sua derivada ao quadrado resulte um número negativo. A equação $|y'| + |y| = 0$ não possui uma solução geral porque a sua única solução é $y \equiv 0$.

Aplicações. Modelação. Problemas de Valor Inicial.

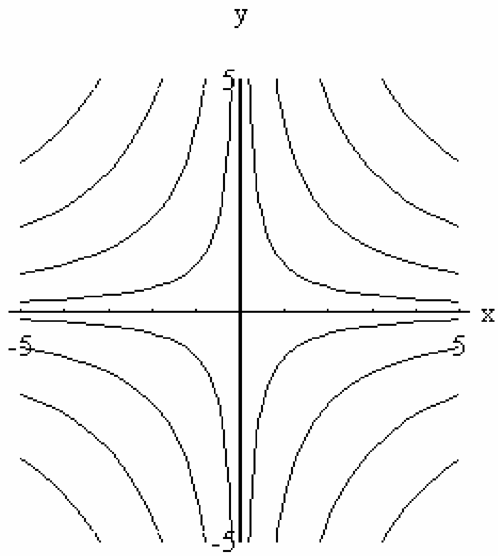
As experiências mostram que uma substância radioactiva se decompõe a uma taxa proporcional à quantidade presente. Começando com uma dada quantidade de substância, digamos, 2 gramas, num determinado momento, por exemplo $t = 0$, o que pode ser dito quanto à quantidade disponível num momento mais tardio?

O *primeiro passo* consiste em estabelecer um *modelo matemático* – uma equação diferencial – do processo físico. Note-se por $y(t)$ a quantidade de substância ainda presente no instante t. A taxa de variação é dy/dt. De acordo com a lei física que rege o processo de radiação, dy/dt é proporcional a y: $\dfrac{dy}{dt} = ky$. Então y é a função desconhecida, que depende de t. A constante k é uma constante física definida cujo valor numérico é conhecido para diversas substâncias radioactivas. (No caso do rádio ${}_{88}\mathrm{Ra}^{226}$, por exemplo, tem-se $k \approx -1.4 \times 10^{-11}$ s^{-1}.) Uma vez que a quantidade de substância é positiva e diminui com o tempo, dy/dt é negativo, e portanto também k o é. Podemos verificar que o processo físico em consideração é descrito matematicamente por uma equação diferencial de 1ª ordem. Assim, esta equação é o modelo matemático deste processo físico. Sempre que uma lei física envolve uma taxa de variação de uma função, tal como velocidade, aceleração, etc, leva-nos a uma equação diferencial. Por este motivo as equações diferenciais são frequentemente encontradas na Física e na Engenharia. O segundo passo consiste em resolver a equação diferencial. A equação $\frac{dy}{dt}=ky$ diz-nos que se existe uma solução $y(t)$, a sua derivada deve ser proporcional a y. De *Análise Matemática* sabemos que as funções exponenciais têm esta propriedade. Por diferenciação e substituição podemos ver que uma solução para todo o t é e^{kt} uma vez que $\left(e^{kt}\right)'=ke^{kt}$, ou mais geralmente, $y(t)=ce^{kt}$ com uma qualquer constante c porque $y'(t)=cke^{kt}=ky(t)$. Uma vez que c é arbitrária, $y(t)=ce^{kt}$ é uma *solução geral* de $\frac{dy}{dt}=ky$ por definição.

O *terceiro passo* consiste na determinação de uma solução particular para uma condição inicial. Uma vez que este processo se comporta de forma única e, sendo assim, a solução particular a obter deve ser única. A quantidade de substância num determinado momento t dependerá da quantidade inicial $y=2$ gramas no momento $t=0$, ou $y(0)=2$, a que chamamos *condição inicial* e é usada para encontrarmos c: $y(0)=ce^{k\cdot 0}=ce^{0}=2 \Leftrightarrow c=2$. Com $c=2$ temos a solução particular $y(t)=2e^{kt}$. Assim, a quantidade de substância radioactiva decresce exponencialmente com o tempo, o que está de acordo com as experiências. O *último passo* consiste na verificação. Da última equação vem $\frac{dy}{dt}=2ke^{kt}=ky$ e $y(0)=2e^{0}=2$. Então, a função $y(t)=2e^{kt}$ satisfaz a equação $\frac{dy}{dt}=ky$ bem como a condição inicial $y(0)=2$. Este passo é extremamente importante porque nos mostra se a função é ou não solução do problema.

Uma equação diferencial com uma condição inicial, como no exemplo anterior, é chamada um *problema de valor inicial*. Com x como variável independente – em vez de t - tem a forma $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$ onde x_0 e y_0 são valores dados. (No exemplo anterior $x_0=t_0=0$ e $y_0=y(0)=2$.) A condição inicial $y(x_0)=y_0$ é utilizada para determinar um valor de c na solução geral.

<u>Exemplo</u> – Encontre a curva que passa pelo ponto $(1{,}1)$ no plano xy que tem em cada um dos seus pontos o declive $-y/x$.



A função que nos dá a curva desejada tem que ser uma solução da equação diferencial $y' = -\frac{y}{x}$. Veremos mais tarde como resolver tal equação. Entretanto podemos verificar que a solução geral de $y' = -\frac{y}{x}$ é $y = \frac{c}{x}$. Se esta for a solução então devemos ter $y = 1$ quando $x = 1$. Esta condição inicial $y(1) = 1$ permite obter $c = 1$ e como resposta a solução particular $y = 1/x$.

Equações Diferenciais Separáveis.

Muitas equações diferenciais de primeira ordem podem ser reduzidas à forma $g(y)y' = f(x)$ através de manipulações algébricas. Uma vez que $y' = dy/dx$, é conveniente escrever $g(y)dy = f(x)dx$, mantendo em mente que se trata apenas de um outro modo de escrita. Tal equação é chamada de *equação separável* ou equação de *variáveis separáveis*, porque as variáveis x e y são separadas de modo que x apareça apenas à direita e y aparece apenas à esquerda. Para resolver $g(y)y' = f(x)$ podemos integrar ambos os membros em relação a x, obtendo $\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx + c \Leftrightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx + c$. Se partirmos do princípio de que f e g são funções contínuas, os integrais existirão e através do seu cálculo obteremos a solução geral de $g(y)y' = f(x)$.

<u>Exemplo</u> – Resolva a equação diferencial $9yy' + 4x = 0$.

Separando as variáveis obtém-se $9ydy = -4dx$. Efectuando a integração em ambos os membros obtém-se a solução geral: $\int 9ydy = \int -4xdx \Leftrightarrow 9\frac{y^2}{2} = -4\frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + \bar{c}$. Assim, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c \quad (c = \frac{\bar{c}}{18})$. A solução representa uma família de elipses.

<u>Exemplo</u> – Resolva a equação diferencial $y' = 1 + y^2$.

Separando as variáveis e por integração obtemos $\frac{dy}{1+y^2} = dx$,

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \Leftrightarrow \arctan y = x + c \Leftrightarrow y = \tan(x+c)$.

<u>Exemplo</u> – Resolva o seguinte problema de valor inicial (PVI) $y' + 5x^4 y^2 = 0, \quad y(0) = 1$.

Separando as variáveis e integrando, obtemos $\frac{dy}{y^2} = -5x^4 dx$, $-\frac{1}{y} = -x^5 + c$,

$y = \frac{1}{x^5 - c}$. Atendendo à condição inicial tem-se $y(0) = \frac{1}{-c} = 1 \Leftrightarrow c = -1$. Assim $y = \frac{1}{x^5 + 1}$.

<u>Exemplo</u> – Resolva o problema de valor inicial $y' = ky, \quad y(0) = 2$.

Separando as variáveis e integrando, $\frac{dy}{y} = k$, $\ln|y| = kx + \bar{c} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = e^{kx+\bar{c}} = e^{kx}e^{\bar{c}} = ce^{kx}$. Para $x = 0 \Rightarrow y = 2 = ce^{k\cdot 0} = c \Rightarrow y = 2e^{kx}$.

Redução à Forma de Variáveis Separadas.

Determinadas equações diferenciais de primeira ordem não são separáveis mas podem ser transformadas nestas através de uma simples mudança de variáveis. Se tivermos uma equação do tipo $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ onde g é uma qualquer função de y/x, por exemplo

$(y/x)^3$, $\sin(y/x)$, etc. A forma da equação sugere que estabeleçamos $\frac{y}{x}=u$. Então $y=xu$, $y'=x'u+xu'=u+xu'$. Sendo assim, em vez de $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$ tem-se $u+xu'=g(u)$. Podemos agora separar as variáveis u e x: $xu'=g(u)-u\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\frac{du}{dx}=g(u)-u\Leftrightarrow\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dx}{x}$. Se integrarmos ambos os membros e após a integração substituirmos u novamente por y/x, obtém-se a solução geral de $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$ como vemos a seguir.

<u>Exemplo</u> – Resolva $2xyy'-y^2+x^2=0$.

Começemos por dividir por $x^2\rightarrow\frac{2xyy'-y^2+x^2}{x^2}=0\Leftrightarrow 2\frac{y}{x}y'-\left(\frac{y}{x}\right)^2+1=0$. Se fizermos uma mudança de variável: $u=\frac{y}{x}$ e utilizarmos a equação que já vimos anteriormente $y'=u+xu'$, vem $2u(u+u'x)-u^2+1=0$. Assim $2xuu'+u^2+1=0$. Separando as variáveis teremos $2xu\frac{du}{dx}+u^2+1=0\Leftrightarrow 2xudu+dx(u^2+1)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2xudu=-dx(u^2+1)\Leftrightarrow\frac{2udu}{u^2+1}=-\frac{dx}{x}$. Por integração tem-se $\int\frac{2udu}{u^2+1}=\int-\frac{dx}{x}$. Façamos nova mudança de variável com $w=u^2+1\Rightarrow dw=2udu\Rightarrow\int\frac{dw}{w}=\int-\frac{dx}{x}$. Então $\ln|w|=-\ln|x|+\bar{c}\Leftrightarrow\ln|u^2+1|=-\ln|x|+\bar{c}\Leftrightarrow\ln(u^2+1)=-\ln|x|+\bar{c}$. Podemos agora efectuar a substituição de u por $\frac{y}{x}$: $l(u^2+1)=-\ln|x|+\ln c\Leftrightarrow\ln(u^2+1)=\ln\frac{c}{x}$ e $u^2+1=\frac{c}{x}\Rightarrow\left(\frac{u}{x}\right)^2+1=\frac{c}{x}\Leftrightarrow\frac{y^2}{x^2}+1=\frac{c}{x}\Leftrightarrow\frac{y^2}{x^2}\times x^2+x^2=\frac{c}{x}x^2\Leftrightarrow y^2+x^2=cx$.

<u>Exemplo</u> – Resolva o problema de valor inicial $y'=\frac{y}{x}+\frac{2x^3\cos x^2}{y}$, $y(\sqrt{\pi})=0$.

Vamos definir $u = \frac{y}{x}$. Então $y = xu$ e $y' = xu' + u$, e a equação fica $xu' + u = u + \frac{2x^2 \cos x^2}{u}$. Simplifiquemos algebricamente $xu' = \frac{2x^2 \cos x^2}{u} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xu'u = 2x^2 \cos x^2 \Leftrightarrow uu' = 2x \cos x^2 \Leftrightarrow u\frac{du}{dx} = 2x \cos x^2 \Leftrightarrow udu = 2x \cos x^2 dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int udu = \int 2x \cos x^2 dx$. Fazendo uma mudança de variável vem $w = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow dw = 2xdx \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \int \cos wdw \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} = \sin w + c \Leftrightarrow \frac{(y/x)^2}{2} = \sin x^2 + c \Leftrightarrow \frac{y^2}{x^2} =$

$= 2\sin x^2 + 2c \Leftrightarrow y^2 = x^2\left(2\sin x^2 + 2c\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2\left(2\sin x^2 + 2c\right)} = x\sqrt{2\sin x^2 + 2c}$.

Segundo a condição inicial: $x = \sqrt{\pi} \Rightarrow y = 0 = \sqrt{\pi}\sqrt{2\sin\left(\sqrt{\pi}\right)^2 + 2c} = \sqrt{\pi}\sqrt{2 \times 0 + 2c}$ isto é, $c = 0$.

Equações Diferenciais Exactas.

Lembremo-nos de *Análise* que se uma função $u(x, y)$ tem derivadas parciais contínuas, o seu diferencial total ou exacto é $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Segue-se então que se $u(x, y) = c =$ constante, então $du = 0$. Vejamos um exemplo de uma função de duas variáveis: se $u = x + x^2 y^3 = c$, então $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy =$

$= \left(1 + 2xy^3\right)dx + 3x^2 y^2 dy = 0$ ou $\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{1 + 2xy^3}{3x^2 y^2}$ (com $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ derivadas parciais), é uma equação diferencial que pode ser resolvida se voltarmos para trás. Este conceito origina um poderoso método de resolução como veremos.

Uma equação diferencial de 1ª ordem da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é chamada *exacta* se o lado esquerdo for o diferencial total ou exacto $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ de uma função $u(x, y)$. Então a equação diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ pode ser escrita como $du = 0$. Por integração obtemos imediatamente a solução geral da equação diferencial na forma $u(x, y) = c$. Comparando $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

com $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$ vemos que a primeira é exacta se existir uma função $u(x, y)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = N$. Suponhamos que M e N são definidas e têm derivadas parciais contínuas numa região no plano xy cuja fronteira é uma curva fechada e não tem auto-intersecções. Sendo assim, se as funções são contínuas as segundas derivadas parciais: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ são iguais: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Esta condição é não somente necessária mas também suficiente para que $Mdx + Ndy$ seja um diferencial exacto. Se $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é exacta, a função $u(x, y)$ pode ser encontrada por tentativas ou de uma forma sistemática. De $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ podemos integrar em ordem a x: $u = \int Mdx + k(y)$; nesta integração y é considerado constante e $k(y)$ desempenha o papel de uma constante de integração. Para determinar $k(y)$, deriva-se $\partial u/\partial y$ de $u = \int Mdx + k(y)$, utiliza-se $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ para calcular dk/dy, e integra-se dk/dy para encontrar k. A fórmula $u = \int Mdx + k(y)$ foi obtida a partir de $\frac{\partial u}{\partial x} = M$. Em vez desta última, podemos igualmente utilizar $\frac{\partial u}{\partial y} = N$. Então obteremos $u = \int Ndy + l(x)$. Para determinar $l(x)$ derivamos $\partial u/\partial x$ de $u = \int Ndy + l(x)$, usamos $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ para calcular dl/dx e integramos.

<u>Exemplo</u> – Resolva $(x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2 y + y^3)dy = 0$.

O 1º passo consiste em saber se se trata de uma equação diferencial exacta: a equação é da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ com $M = x^3 + 3xy^2$, $N = 3x^2 y + y^3$. Assim $\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy$. Uma vez que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ então a equação diferencial é exacta.

O 2º passo consiste no seguinte: de $u = \int Mdx + k(y)$ obtemos $u = \int (x^3 + 3xy^2)dx + k(y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 y^2 + k(y)$. Para encontrar $k(y)$ diferencia-se esta fórmula em ordem a y e utiliza-se a fórmula $\frac{\partial u}{\partial y}=N$. Obtém-se $\frac{\partial u}{\partial y}=$ $=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2+k(y)\right)=3x^2y+\frac{dk}{dy}=N=3x^2y+y^3$. Então $\frac{dk}{dy}=3x^2y+y^3-$ $-3x^2y=y^3\Rightarrow k=\int\frac{dk}{dy}=\int y^3=\frac{y^4}{4}+\bar{c}$. Tem-se assim, $u(x,y)=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2+$ $+k(y)=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}+\bar{c}\Rightarrow\frac{1}{4}\left(x^4+6x^2y^2+y^4\right)=c$.

O 3º passo consiste na verificação: Note-se que este método nos dá a solução na forma implícita, $u(x,y)=c=$constante e não na forma explícita, $y=f(x)$. Para a verificação podemos diferenciar $u(x,y)=c$ implicitamente e ver se nos conduz a $dy/dx=-M/N$ ou $Mdx+Ndy=0$, a equação dada. No caso presente, diferenciando $u(x,y)=\frac{1}{4}\left(x^4+6x^2y^2+y^4\right)=c$ implicitamente em relação a x, obtemos: $u_x(x,y)=\frac{1}{4}\left(4x^3+12xy^2\right)$, $u_y(x,y)=\frac{1}{4}\left(12x^2yy'+4y^3y'\right)$. Juntando os termos tem-se $\frac{1}{4}\left(4x^3+12xy^2+12x^2yy'+4y^3y'\right)=0\Leftrightarrow x^3+3xy^2+y'\left(3x^2y+y^3\right)=0$, o que é igual a $M+Ny'=0$ com $M=x^3+3xy^2$ e $N=3x^2y+y^3$. Logo $M+N\frac{dy}{dx}=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Mdx+Ndy=0$.

<u>Exemplo</u> – Resolva a equação $ydx-xdy=0$.

Vemos que $M=y$, $N=-x$, então $\frac{\partial M}{\partial y}=1$ mas $\frac{\partial N}{\partial x}=-1$. Como $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$, a equação não é exacta. Vamos mostrar que em tal caso, o método não funciona: $u=\int Mdx+k(y)=\int ydx+k(y)=xy+k(y)$. Então $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(xy+k(y))=x+k'(y)$ o que deveria ser igual a $N=-x$ o que é impossível pois $k(y)$ só depende de y. Teria que ser resolvida por outro dos métodos já discutidos.

Factores Integrantes.

Por vezes tem-se uma equação $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ que não é exacta, mas se a multiplicarmos por uma função adequada $F(x,y)$, a nova equação $FPdx + FQdy = 0$ é exacta e pode ser resolvida pelo método anterior. A função $F(x,y)$ é então chamada um *factor integrante* de $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. Vejamos alguns exemplos simples e então veremos como obter factores integrantes de um modo sistemático.

<u>Exemplo</u> – Mostre que a equação diferencial $ydx - xdy = 0$ não é exacta, mas tem um factor integrante, nomeadamente, $F = 1/x^2$, e resolva a nova equação.

A equação é da forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ com $P = y$ e $Q = -x$. Uma vez que $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ mas $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$, a equação não é exacta. Multiplicando por $F = 1/x^2$, obtém-se a equação exacta: $FPdx + FQdy = \frac{ydx - xdy}{x^2} = -d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = c$ temos portanto linhas rectas $y = cx$ que passam pela origem. Outros factores integrantes de $ydx - xdy = 0$ são $1/y^2$, $1/(x^2 + y^2)$ pois $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$, $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = -d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$, $\frac{ydx - xdy}{xy} = d\left(\ln\frac{x}{y}\right)$.

<u>Exemplo</u> – Verifique que $F(x) = x^3$ é um factor integrante de $2\sin(y^2)dx + xy\cos(y^2)dy = 0$ e encontre a solução geral.

$2\sin(y^2) = M$, $xy\cos(y^2) = N$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2\cos(y^2)\cdot 2y = 4y\cos(y^2)$ e $\frac{\partial N}{\partial x} =$ $= y\cos(y^2)\cdot 1 \Rightarrow$ são diferentes.

Multipliquemos a equação - não exacta, como vimos – por x^3. Temos assim: $2x^3\sin(y^2)dx + x^4 y\cos(y^2)dy = 0$. Vejamos se é exacta: $\frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 y\cos(y^2) = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Vamos resolver normalmente: $u = \int M dx + k(y) = \int 2x^3 \sin(y^2) dx + k(y) =$

$= 2\sin(y^2)\dfrac{x^4}{4} + k(y) = \dfrac{1}{2}x^4 \sin(y^2) + k(y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{2}x^4 \sin(y^2) + k(y)\right) =$

$= \dfrac{x^4}{2}\cos(y^2)2y + \dfrac{dk}{dy} = x^4 y \cos(y^2) + \dfrac{dk}{dy} = N = x^4 y \cos(y^2) \Leftrightarrow \dfrac{dk}{dy} = 0 \Rightarrow k = \bar{c}$.

$u(x, y) = \dfrac{1}{2}x^4 \sin(y^2) + \bar{c} \Rightarrow x^4 \sin(y^2) = c$.

Como Encontrar os Factores Integrantes.

Nos casos mais simples, os factores integrantes podem ser encontrados após algumas tentativas. No caso geral, a ideia consiste no seguinte: a equação $FPdx + FQdy = 0$ tem a forma $Mdx + Ndy = 0$ com $M = FP$ e $N = FQ$, e torna-se exacta pela definição de um factor integrante. Então o critério de exactidão $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ é agora $\dfrac{\partial}{\partial y}(FP) = \dfrac{\partial}{\partial x}(FQ)$, isto é, $F_y P + FP_y = F_x Q + FQ_x$ - o sub-índice refere-se às derivadas parciais. No caso geral, isto seria complicado e inútil. Devemos então seguir a *Regra de Ouro*, isto é, se não se consegue resolver o problema deve resolver-se um mais simples – o resultado pode ser útil, e pode ajudar mais tarde. Então, procura-se um factor integrante que dependa apenas de uma variável; felizmente, em muitos casos práticos, existem tais factores, como veremos. Assim, seja $F = F(x)$. Então $F_y = 0$ e $F_x = F' = dF/dx$, portanto $\dfrac{\partial}{\partial y}(FP) = \dfrac{\partial}{\partial x}(FQ)$ torna-se $FP_y = F'Q + FQ_x$. Dividindo por FQ e reordenando os termos, tem-se $\dfrac{1}{F}\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$, o que prova os teoremas:

<u>Teorema</u> – Se $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ é tal que o membro direito de $\dfrac{1}{F}\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$, chamemos-lhe R, depende somente de x, então $Pdx + Qdy = 0$ tem um factor integrante $F = F(x)$, que é obtido integrando

$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ e tirando os expoentes em ambos os membros, $F(x) = \exp\int R(x)dx$. Similarmente, se $F = F(y)$, então em vez de $\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ teremos $\frac{1}{F}\frac{dF}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

<u>Teorema</u> - Se $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ é tal que o membro direito de $\frac{1}{F}\frac{dF}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$, depende somente de y, então $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ tem um factor integrante $F = F(y)$, que é obtido de $\frac{1}{F}\frac{dF}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ na forma $F(y) = \exp\int \tilde{R}(y)dy$.

<u>Exemplo</u>- Resolva $2\sin(y^2)dx + xy\cos(y^2)dy = 0$ utilizando o primeiro teorema.

Tem-se $P = 2\sin(y^2)$, $Q = xy\cos(y^2)$, então de $\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ tem-se do lado direito ($= R$), $R = \frac{1}{xy\cos(y^2)}\left(4y\cos(y^2) - y\cos(y^2)\right) = \frac{3}{x}$ e assim $F(x) = \exp\int \frac{3}{x}dx = x^3$ como se tinha verificado no 2º exemplo.

<u>Exemplo</u> – Resolva o problema de valor inicial $2xydx + (4y + 3x^2)dy = 0$, $y(0{,}2) = -1{,}5$.

Apliquemos os dois teoremas. Aqui, $P = 2xy$, $Q = 4y + 3x^2$, a equação não é exacta, o membro direito de $\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ depende quer de x, quer de y, mas o membro direito de $\frac{1}{F}\frac{dF}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ é $\tilde{R} = \frac{1}{2xy}(6x - 2x) = \frac{2}{y}$. Assim $F(y) = y^2$ é um factor integrante da forma $F(y) = \exp\int \tilde{R}(y)dy$. A multiplicação por

y^2 dá a equação exacta $2xy^3dx + (4y^3 + 3x^2y^2)dy = 0$, que podemos escrever como $4y^3dy + (2xy^3dx + 3x^2y^2dy) = 0$. Esta equação pode ser resolvida pois é uma equação diferencial exacta: $M = 2xy^3$, $N = 4y^3 + 3x^2y^2$. Assim $\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$, logo $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (é exacta). $u = \int Mdx + k(y) = \int 2xy^3dx + k(y) = x^2y^3 + k(y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2 + \frac{dk}{dy} = N = 4y^3 + 3x^2y^2$. Então $\frac{dk}{dy} = 4y^3$ e $k = \int 4y^3dy = y^4 + \tilde{c}$. Logo $u(x, y) = x^2y^3 + y^4 = c$. Daqui obtemos $0{,}2^2(-1{,}5)^3 + (-1{,}5)^4 = 4{,}9275$ pela condição inicial.

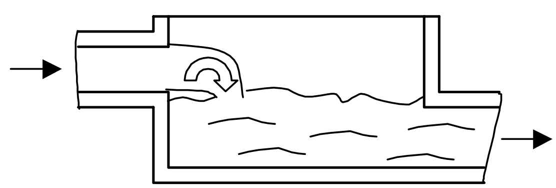
Equações Diferenciais Lineares.

Diz-se que uma equação diferencial de primeira ordem é *linear* se pode ser escrita na forma: $y' + p(x)y = r(x)$. O traço característico desta equação consiste no facto de ser linear em y e y', enquanto que p e r à direita podem ser quaisquer funções dadas de x. Se $r(x)$ for igual a zero para todo o x no intervalo no qual a equação é considerada, ($r(x) \equiv 0$), diz-se que a equação é *homogénea*, de outro modo diz-se *não homogénea*. Encontremos uma fórmula para a solução geral de $y' + p(x)y = r(x)$ num intervalo I, assumindo que p e r são contínuas em I. Para a equação homogénea $y' + p(x)y = 0$ isso é muito simples. Na verdade separando as variáveis tem-se $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$, assim $\ln|y| = -\int p(x)dx + c^*$ e retirando os expoentes em ambos os lados vem $y(x) = ce^{-\int p(x)dx}$ (com $c = \pm e^{c^*}$ quando $y \neq 0$). Se suposermos $c = 0$ obteremos a *solução trivial* $y \equiv 0$. Tratemos de resolver a equação não homogénea $y' + p(x)y = r(x)$. Acabamos por verificar que possui a propriedade de ter um factor integrante dependendo somente de x. Primeiro escrevemos $y' + p(x)y = r(x)$ na forma $(py - r)dx + dy = 0$, ou seja, $Pdx + Qdy = 0$, onde $P = py - r$ e $Q = 1$. Então a equação $\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ fica simplesmente $\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = p(x)$. Uma vez que só depende de x, a equação $y' + p(x)y = r(x)$ tem um factor integrante $F(x)$, que é obtido directamente por integração e exponenciação: $F(x)=e^{\int pdx}$ - como anteriormente para obter $F(x)=\exp\int R(x)dx$. A multiplicação de $y'+p(x)y=r(x)$ por F dá $e^{\int pdx}(y'+py)=\left(e^{\int pdx}y\right)'=e^{\int pdx}r$. Integremos agora em relação a x, $e^{\int pdx}y=\int e^{\int pdx}rdx+c$ e resolvamos em relação a y: $y(x)=e^{-h}\left[\int e^{h}rdx+c\right]$, com $h=\int p(x)dx$. Isto representa a solução geral de $y'+p(x)y=r(x)$ na forma de um integral. (A escolha da constante de integração em $\int pdx$ não interessa.)

Exemplo – Resolva a equação diferencial linear $y'-y=e^{2x}$.

Aqui $p=-1$, $r=e^{2x}$, $h=\int pdx=\int -dx=-x$ e de $y(x)=e^{-h}\left[\int e^{h}rdx+c\right]$ obtemos a solução geral $y(x)=e^{x}\left[\int e^{-x}e^{2x}dx+c\right]=e^{x}\left[e^{x}+c\right]=ce^{x}+e^{2x}$. Alternativamente podemos multiplicar a equação dada por $e^{h}=e^{-x}$, encontrando $(y'-y)e^{-x}=\left(ye^{-x}\right)'=e^{2x}e^{-x}=e^{x}$ e integrando em ambos os membros, obtendo o mesmo resultado que antes: $ye^{-x}=e^{x}+c\Rightarrow y=e^{2x}+ce^{x}$.

Exemplo – O tanque na figura contém 200 gal de água na qual estão dissolvidos 40 lb de sal. 5 gal de água salgada contendo 2 lb de sal dissolvido, entram no tanque por minuto e a mistura, mantida uniforme por agitação sai do tanque à mesma velocidade. Encontre a quantidade de sal $y(t)$ no tanque em qualquer momento t.



1º passo – Modelação matemática: a taxa de alteração $y'=dy/dt$ de $y(t)$ iguala o fluído de entrada $5\times 2=10$ (lb/min) de sal menos o fluído de saída. O fluido de saída (lb/min) é $(5/200)\times y(t)=0{,}025y(t)$ porque $y(t)$ é a quantidade total de sal no tanque e 5 gal/200 gal é a fracção de volume que sai por minuto. Alternativamente, $y(t)$ é a quantidade total de sal, então $y(t)/200$ é a quantidade de sal por galão, e 5 gal/min saem. Assim o modelo é $y' = 10 - 0{,}025y$, isto é, o problema de valor inicial: $y' + 0{,}025y = 10, \quad y(0) = 40$.

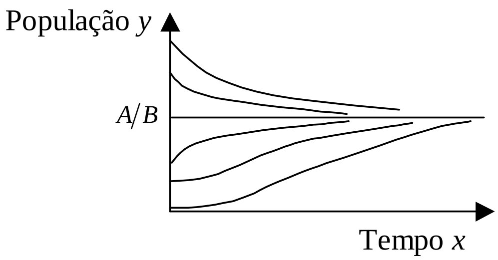
2º passo – Resolução da equação: em $y(x) = e^{-h}\left[\int e^h r dx + c\right]$ com t em vez de x, temos $p = 0{,}025$, $h = 0{,}025t$, $r = 10$ e teremos a equação geral $y(t) = e^{-0{,}025t}\left[\int e^{0{,}025t} \cdot 10 dt + c\right] = e^{-0{,}025t}\left[\dfrac{10}{0{,}025} e^{0{,}025t} + c\right] = ce^{-0{,}025t} + 400$. A condição inicial $y(0) = c + 400 = 40$ origina $c = -360$ e como resposta a solução particular $y(t) = 400 - 360e^{-0{,}025t}$ (lb).

Redução à Forma Linear. Equação de Bernoulli.

Certas equações não lineares podem ser reduzidas à forma linear. O caso mais famoso consiste na *equação de Bernoulli*: $y' + p(x)y = g(x)y^a$ (com a um número real qualquer). Se $a = 0$ ou $a = 1$, a equação é linear. De outro modo é não-linear. Definamos $u(x) = [y(x)]^{1-a}$. Diferenciemos e substituamos y' por $g(x)y^a - p(x)y$ obtendo $u' = (1-a)y^{-a}\left(gy^a - py\right) = (1-a)\left(g - py^{1-a}\right)$, onde $y^{1-a} = u$ à direita, de modo a obtermos a equação linear $u' + (1-a)pu = (1-a)g$.

<u>Exemplo</u> – Resolva a equação de Bernoulli especial, chamada a *equação de Verhulst*: $y' - Ay = -By^2$ (A, B constantes positivas).

Aqui, $a = 2$, portanto $u = y^{-1}$ e por diferenciação e substituição de y' de $y' - Ay = -By^2$, vem $u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}\left(-By^2 + Ay\right) = B - Ay^{-1}$, isto é, $u' + Au = B$. De $y(x) = e^{-h}\left[\int e^h r dx + c\right]$ com $p = A$, $h = Ax$ e $r = B$ obtemos $u = e^{-Ax}\left[\int Be^{Ax} dx + c\right] = e^{-Ax}\left[\dfrac{B}{A}e^{Ax} + c\right] = ce^{-Ax} + \dfrac{B}{A}$ o que permite obter a solução geral $y = \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{(B/A) + ce^{-Ax}}$ e directamente de $y' - Ay = -By^2$ vemos que $y \equiv 0$ é também uma solução. A equação $y = \dfrac{1}{(B/A) + ce^{-Ax}}$ é chamada a *lei logística* do crescimento populacional, onde x representa o tempo. Para $B = 0$ o crescimento é exponencial: $y = (1/c)e^{Ax}$ (*Lei de Malthus*). $-By^2$ é um *termo de paragem*, impedindo a população de crescer sem limite. Na verdade, a lei logística mostra que populações inicialmente pequenas $(0 < y(0) < A/B)$ aumentam uniformemente até A/B, enquanto que populações inicialmente grandes $(y(0) > A/B)$ decrescem uniformemente até ao mesmo limite A/B:



A lei logística tem aplicações muito úteis no que diz respeito a populações de humanos e também no tocante a populações de animais.

Entrada e Saída.

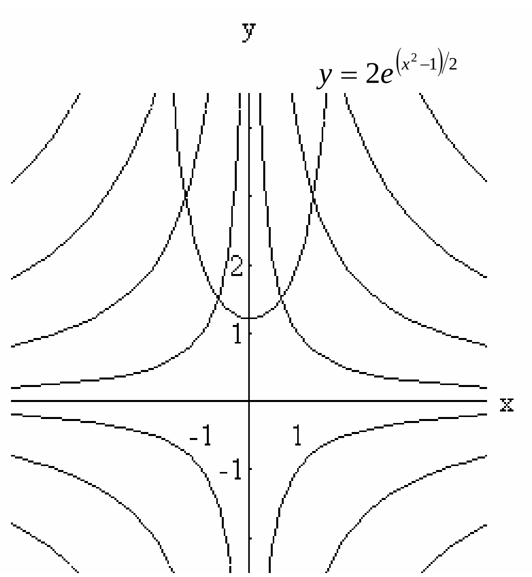
As equações diferenciais lineares têm várias aplicações. A variável independente x representa na prática frequentemente o tempo; a função $r(x)$ no membro direito de $y' + p(x)y = r(x)$ pode representar uma força, e a solução $y(x)$ um deslocamento, uma corrente, ou uma qualquer outra variável representando uma quantidade física. Em matemática de engenharia $r(x)$ é frequentemente denominada a *entrada*, e $y(x)$ é chamada de *saída* ou *resposta à entrada* (e condições iniciais).

Soluções Aproximadas: Campos Direccionais, Iteração.

As soluções aproximadas de uma equação diferencial têm interesse prático se a equação não tem uma fórmula de solução exacta explícita ou se a fórmula é demasiado complicada para ter um interesse prático. Podem então utilizar-se *métodos numéricos* ou podemos usar o *método dos campos direccionais*, através do qual podemos esboçar muitas curvas solução simultaneamente – sem resolver, na prática, a equação.

Método dos Campos Direccionais.

Este método aplica-se a qualquer equação diferencial $y' = f(x, y)$. A ideia é simplesmente esta: y' é o declive das curvas solução desconhecidas. Se uma tal curva passa por um ponto $P: (x_0, y_0)$, o seu declive em P deve ser $f(x_0, y_0)$, como podemos ver directamente de $y' = f(x, y)$. Assim poderíamos desenhar em diversos pontos *elementos lineares*, significando segmentos curtos que indicam as direcções tangentes das curvas solução como determinadas por $y' = f(x, y)$, e depois efectuar o ajustamento das curvas solução através deste campo de direcções tangentes. É melhor e mais económico se representarmos primeiro curvas de declive constante $f(x, y) =$ constante – portanto, ainda não são estas as curvas solução – a que também se chama *isóclinas* – significando curvas de iguais inclinações. Depois, como segundo passo, desenhamos ao longo de cada isóclina, $f(x, y) = k =$ constante, muitos elementos lineais de declive k. O que se obtém é chamado de *campo direccional* de $y' = f(x, y)$. Como terceiro passo, podemos agora esboçar curvas solução aproximadas de $y' = f(x, y)$, guiadas pelas direcções tangentes fornecidas pelos elementos lineais. É suficiente para ilustrar o método através de uma equação simples que pode ser resolvida de forma exacta, para que possamos ter uma ideia da precisão do método.



<u>Exemplo</u> – Represente graficamente o campo dieccional da equação diferencial de primeira ordem $y' = xy$ e uma aproximação à curva solução através do ponto $(1,2)$. Compare com a solução exacta.

As isóclinas são as hipérboles equilaterais $xy = k$ juntamente com os dois eixos coordenados. Representamos graficamente alguns deles. Depois representamos elementos lineais fazendo deslizar um triângulo ao longo de uma régua fixa. O resultado é mostrado na figura que também mostra uma aproximação à curva solução que passa pelo ponto $(1,2)$. Separando as variáveis tem-se $y = ce^{x^2/2}$. A condição inicial é $y(1) = 2$. Portanto $2 = ce^{1/2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow c = 2e^{-1/2}$ e a solução exacta $y = = 2e^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow 2e^{\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}} = y = 2e^{(x^2-1)/2}$.

Método de Iteração de Picard.

O *método de Picard* fornece soluções aproximadas de um problema de valor inicial $y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$ que se assume ter uma solução única num intervalo aberto no eixo dos x contendo x_0. O método não é muito prático porque envolve integrações. Será no entanto discutido essencialmente por duas razões:

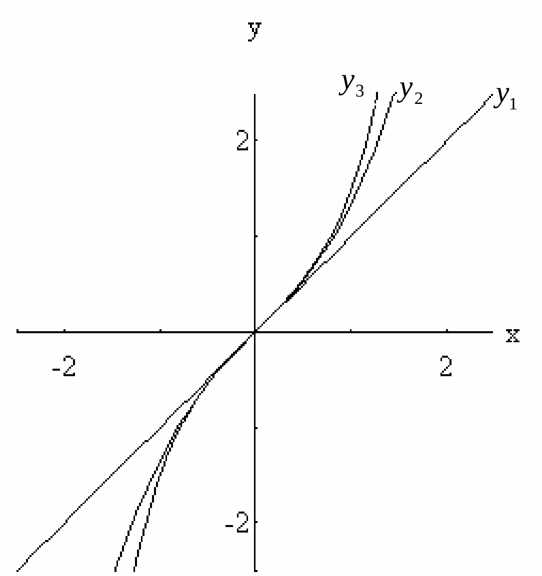
1. O método de Picard é a base dos teoremas de existência de solução e de solução única;
2. O método de Picard ilustra a ideia dos *métodos iterativos*, nos quais se realizam diversos passos de cálculo ou computacionais pela mesma regra mas com alterações dos dados – normalmente os obtidos no passo anterior, como veremos.

Os métodos iterativos são utilizados bastante frequentemente em *Matemática Aplicada* particularmente em *Cálculo Numérico*. A ideia do método de Picard é simples. Por integração podemos ver que $y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$ pode ser escrita na forma $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt$ onde t representa a variável de integração. De facto, quando $x = x_0$ o integral é zero e $y = y_0$, de forma que a expressão $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt$ satisfaça a condição inicial $y(x_0) = y_0$; para além disso, diferenciando $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt$ obtém-se a equação diferencial em $y' = f(x,y)$ com $y(x_0) = y_0$. Para encontrar aproximações à solução $y(x)$ de $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]dt$ procede-se do seguinte modo: substitui-se a aproximação $y = y_0 =$constante à direita; isto permite obter a presumivelmente melhor aproximação $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt$. No próximo passo substituimos a função

$y_1(x)$ do mesmo modo para encontrar a aproximação $y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_1(t)]dt$, etc. O n-ésimo passo desta iteração dá-nos uma função aproximada $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]dt$. Desta forma obtemos a sequência de aproximações $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots$, e veremos que esta sequência converge para a solução $y(x)$ de $y' = f(x,y),\quad y(x_0) = y_0$ sob condições bastante gerais.

Exemplo – Encontre soluções aproximadas para o problema de valor inicial $y' = 1 + y^2,\quad y(0) = 0$.

Neste caso, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $f(x,y) = 1 + y^2$, e $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]dt$ torna-se $y_n(x) = y_0 + \int_0^x [1 + y_{n-1}^2(t)]dt = x + \int_0^x y_{n-1}^2(t)dt$. Começando com $y_0 = 0$ obtemos assim $y_1(x) = x + \int_0^x 0dt = x$; $y_2(x) = x + \int_0^x t^2 dt = x + \frac{1}{3}x^3$; $y_3(x) = x + \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{3}\right)dt =$ $= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$, etc. Podemos, evidentemente, obter a solução exacta do nosso problema separando as variáveis ($\frac{dy}{1+y^2} = dx$, $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \Leftrightarrow \arctan y =$ $= x + c \Leftrightarrow y = \tan(x+c)$, como vimos no 2º exemplo das equações diferenciais separáveis), encontrando $y(x) =$ $= \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Os primeiros 3 termos de $y_3(x)$ e da série anterior são os mesmos. A série $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots$ converge para $|x| < \frac{\pi}{2}$, e tudo o que podemos esperar é que a nossa



sequência y_1, y_2, … convirga para uma função que é a solução do nosso problema para $|x| < \frac{\pi}{2}$, o que ilustra que o estudo da convergência é de importância prática.

Existência de Solução e Solução Única.

Até agora, para as equações consideradas existia uma solução geral e *para um problema de vaor inicial*, por exemplo $y' = f(x, y),\quad y(x_0) = y_0$ consistindo numa equação diferencial e numa condição inicial $y(x_0) = y_0$, tem-se uma única solução particular. No entanto, é somente uma de três possibilidades ilustrada pelos seguintes exemplos: o problema de valor inicial $|y'| + |y| = 0,\quad y(0) = 1$ tem precisamente uma solução, nomeadamente, $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$. O problema de valor inicial $xy' = y - 1,\quad y(0) = 1$ tem um número de soluções infinitas, nomeadamente, $y = 1 + cx$ onde c é uma constante arbitrária. Destes três exemplos vemos que um problema de valor inicial pode não ter soluções, uma única solução, ou mais do que uma solução. Isto leva-nos às seguintes duas questões fundamentais:

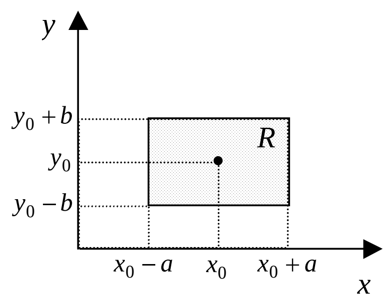
Problema de existência – Sob que condições é que um problema da valor inicial da forma $y' = f(x, y),\quad y(x_0) = y_0$ tem pelo menos uma solução?

Problema de solução única – Sob que condições é que o mesmo problema tem no máximo uma solução?

Os teoremas que esclarecem tais condições são denominados respectivamente de *teoremas de existência de solução* e *teoremas de solução única*. Evidentemente, os nossos três exemplos são tão simples que podemos encontrar a resposta às duas questões simplesmente por inspecção, sem usar quaisquer teoremas. É no entanto claro que em casos mais complicados – por exemplo, quando a equação não pode ser resolvida por métodos elementares – os teoremas referidos podem ser de considerável importância prática. Mesmo quando se tem a certeza que os sistemas físicos ou outros se comportam de forma única, por vezes o modelo pode ser simplificado e não fornecer uma imagem fiel da realidade. Assim, antes de se tentar calcular uma solução no computador, devemos certificar-nos que o nosso modelo admite solução única. Os dois teoremas que se seguem aplicam-se a quase todos os casos práticos admissíveis. O primeiro teorema diz-nos que se $f(x,y)$ é contínua numa região do plano xy contendo o ponto (x_0, y_0) - correspondente à condição inicial – então o problema $y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$ tem pelo menos uma solução. Se, para além disso a derivada parcial $\partial f/\partial y$ existe e é contínua nessa região, então o problema tem precisamente uma solução. Esta solução pode então ser obtida pelo método de iteração de Picard.

Formulemos estas afirmações de modo preciso:

<u>Teorema da existência</u> – Se $f(x,y)$ é contínua em todos os pontos (x,y) num rectângulo $R: |x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$ e confinada* em R, digamos $|f(x,y)| \le k$ então o problema de valor inicial $y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$ tem pelo menos uma solução $y(x)$. Esta solução é definida pelo menos para todo o x no intervalo $|x - x_0| < \alpha$ onde α é o mais pequeno de dois números a e b/k.



<u>Teorema da solução única</u> – Se $f(x,y)$ e $\partial f/\partial y$ são contínuas para todo (x,y) nesse rectângulo R e confinado, digamos $|f| \le k$; $|\partial f/\partial y| \le M$ para todo (x,y) em R, então o problema de valor inicial $y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$ tem no máximo uma solução $y(x)$. Então, pelo primeiro Teorema, tem precisamente uma solução. Esta solução é definida pelo menos para todo o x naquele intervalo $|x - x_0| < \alpha$. Pode ser obtida pelo método de Picard, isto é, a sequência y_0, y_1, …, y_n, …, onde $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]dt$, $n = 1,2,\ldots$, converge para a solução $y(x)$.

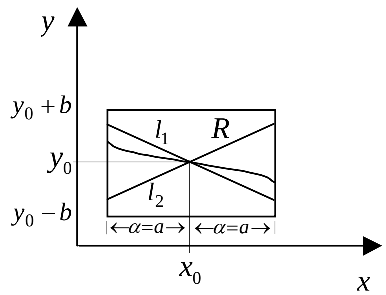
---

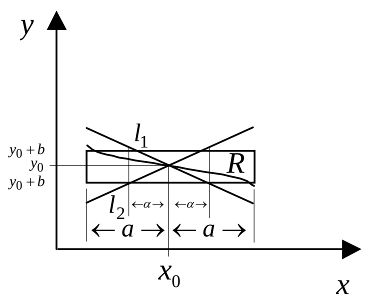
* Diz-se que uma função $f(x,y)$ está confinada quando (x,y) varia numa região no plano xy, se existir um número k tal que $|f(x,y)| \le k$ quando (x,y) se encontra nessa região. Por exemplo, $f = x^2 + y^2$ está confinada com $k = 2$ se $|x| < 1$ e $|y| < 1$. A função $f = \tan(x + y)$ não está confinada para $|x + y| < \pi/2$.

Não provaremos estes teoremas, que exigem elevado conhecimento de convergência de séries, mas veremos exemplos que clarificam a situação.

Uma vez que $y' = f(x, y)$, a condição $|f(x, y)| \le k$ implica que $|y'| \le k$, isto é, o declive de qualquer curva solução $y(x)$ em R é no mínimo $-k$ e no máximo k. Assim, uma curva solução que passa pelo ponto (x_0, y_0) deve figurar na região sombreada da figura limitada pelas linhas l_1 e l_2 cujos declives são $-k$ e k, respectivamente. Dependendo da forma de R, podemos ter dois casos diferentes.

No primeiro caso, mostrado na primeira figura, tem-se $b/k \ge a$ e portanto $\alpha = a$ no Teorema de existência, que nos diz que a solução existe para todo o x entre $x_0 - a$ e $x_0 + a$. No segundo caso, mostrado na segunda figura, tem-se $b/k < a$. Portanto $\alpha = b/k$, e tudo o que podemos concluir dos teoremas é que a solução existe para todo o x entre $x_0 - b/k$ e $x_0 + b/k$. Para x maiores e menores a curva solução pode sair do rectângulo R, e uma vez que nada é assumido quanto à função fora de R, nada pode ser concluído sobre a solução para x maior ou menor; isto é, para tais x a solução pode ou não existir – não sabemos.





Exemplo – Considere o problema $y' = 1 + y^2$, $\quad y(0) = 0$ - ver último exemplo – e seja R: $|x| < 5$, $|y| < 3$. Então $a = 5$, $b = 3$ e $|f| = |1 + y^2| \le k = 10$, $|\partial f / \partial y| \le M = 6$, $\alpha = b/k = 0{,}3 < a$. De facto, a solução $y = \tan x$ do problema é descontínua em $x = \pm \pi/2$, e não existe uma solução contínua válida em todo o intervalo $|x| < 5$ com o qual começamos. As condições nos dois teoremas são condições suficientes, mais do que condições necessárias, e podem ser diminuidas. Por exemplo, pelo teorema do valor médio do cálculo diferencial temos $f(x, y_2) - f(x, y_1) = (y_2 - y_1) \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\tilde{y}}$ onde

(x, y_1) e (x, y_2) se assume pertencerem a R, e $\tilde{y}$ é um valor adequado entre y_1 e y_2. Daqui e de $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq M$ segue-se que $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M|y_2 - y_1|$ e pode mostrar-se que $|\partial f / \partial y| \leq M$ pode ser substituida pela condição mais fraca $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M|y_2 - y_1|$ que é conhecida pela *condição de Lipschitz*. Podemos ilustrá-lo com o seguinte exemplo:

<u>Exemplo</u> – O problema de valor inicial $y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$ tem duas soluções: $y \equiv 0$ e $y^* = \begin{cases} x^2/4 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2/4 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ embora $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ seja contínua para todo o y. A condição de Lipschitz $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M|y_2 - y_1|$ é violada em qualquer região que inclua a linha $y = 0$, porque para $y_1 = 0$ e y_2 positivo tem-se $\frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}}$ e isto pode ser tornado tanto maior quanto quisermos escolhendo y_2 suficientemente pequeno, enquanto que $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M|y_2 - y_1|$ exige que o quociente $\frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2 - y_1|}$ não exceda uma constante fixa M.