Capítulo II

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE 2ª ORDEM

Capítulo II

Até agora já conhecemos uma série de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Definiremos e consideraremos agora equações diferenciais lineares de segunda ordem.

Equações Lineares Homogéneas.

Uma equação diferencial de segunda ordem é chamada *linear* se pode ser escrita na forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ e *não linear* se não pode ser escrita nesta forma. O traço característico desta equação consiste no facto de ser linear na função desconhecida y e nas suas derivadas, enquanto que p e q, bem como r à direita podem ser quaisquer funções dadas de x. Se o primeiro termo for, digamos, $f(x)y''$, temos que dividir por $f(x)$ para obter a *forma padrão*, com y'' como o primeiro termo, o que é exequível. Se $r(x) \equiv 0$ - isto é, $r(x) = 0$ para todo o x considerado – então $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ torna-se simplesmente $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ e é chamada *homogénea*. Se $r(x) \neq 0$ então é chamada *não homogénea*. Isto é similar ao que vimos anteriormente. As funções p e q são chamadas os coeficientes das equações. Um exemplo de uma equação diferencial linear não homogénea é $y'' + 4y = e^{-x} \sin x$. Um exemplo de uma equação linear homogénea é $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$. Exemplos de equações diferenciais não lineares são $x(y''y + y'^2) + 2y'y = 0$ e $y'' = \sqrt{y'^2 + 1}$. Suporemos que x varia num intervalo aberto I, e todas as suposições e afirmações se referem a I, que não necessita de ser especificado em cada caso. (Recordemos que I pode compreender todo o eixo dos x.) Uma *solução* de uma equação diferencial – linear ou não linear – de segunda ordem num intervalo aberto $a < x < b$ é uma função $y = h(x)$ que tem derivadas $y' = h'(x)$ e $y'' = h''(x)$ e satisfaz aquela equação diferencial para todo o x no intervalo I; isto é, a equação torna-se uma identidade se substituirmos a função desconhecida y e as suas derivadas por h e pelas suas correspondentes derivadas.

Equações Homogéneas: Princípio de Superposição ou Linearidade.

Exemplo - $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ são soluções da equação diferencial linear homogénea $y'' - y = 0$ para todo o x porque para $y = e^x$ obtém-se $\left(e^x\right)'' - e^x = e^x - e^x = 0$ e similarmente para $y = e^{-x}$. Podemos ir até um pouco mais além. Pode multiplicar-se e^x e e^{-x} por diferentes constantes, digamos, -3 e 8 – ou quaisquer outros números – e depois tomar a soma $y = -3e^x + 8e^{-x}$ e verificar que esta é outra solução da nossa equação homogénea porque $\left(-3e^x + 8e^{-x}\right)'' - \left(-3e^x + 8e^{-x}\right) = -3e^x + 8e^{-x} - - \left(-3e^x + 8e^{-x}\right) = 0$.

Este exemplo ilustra o facto extremamente importante de que de uma equação *linear homogénea* $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, podemos obter sempre novas soluções de soluções conhecidas por multiplicação de constantes e por adição. É evidente que isto é de grande vantagem porque deste modo pode obter-se mais soluções de soluções dadas. No caso acima para y_1 $(= e^x)$ e y_2 $(= e^{-x})$ obtém-se uma solução da forma $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (c_1, c_2 constantes arbitrárias). Chamamos a isto uma combinação linear de y_1 e y_2. Utilizando este conceito, podemos agora formular o resultado sugerido pelo nosso exemplo, frequentemente denominado de *princípio da superposição* ou princípio da linearidade.

Teorema – Para uma equação diferencial linear homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. qualquer combinação linear de duas soluções num intervalo aberto I é novamente uma solução da equação anterior em I. Em particular, para uma tal equação, somas e múltipos constantes das soluções são novamente soluções $\rightarrow$ *Teorema fundamental*.

Demonstração – Sejam y_1 e y_2 soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I. Então, pela substituição de $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ e as suas derivadas em $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ e usando a regra já familiar $\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right)' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$, etc, obtém-se $y'' + py' + qy = \left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right)'' + p\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right)' + q\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right)$. Então tem-se $c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + p\left(c_1 y_1' + c_2 y_2'\right) + q\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right) = c_1\left(y_1'' + py_1' + qy_1\right) + c_2\left(y_2'' + py_2' + qy_2\right) =$

$= 0$, uma vez que na última linha, $(\cdots) = 0$ porque y_1 e y_2 são soluções, por assim se assumir. Isto mostra-nos que y é uma solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I.

Atenção! - Relembremos sempre este importante teorema mas não esqueçamos que não se verifica para equações lineares não homogéneas ou equações não lineares como o exemplo a seguir demonstra.

<u>Exemplo</u> – A substituição mostra que as funções $y = 1 + \cos x$ e $y = 1 + \sin x$ são soluções da equação diferencial linear não homogénea $y'' + y = 1$, mas as funções seguintes $2(1 + \cos x)$ e $(1 + \cos x) + (1 + \sin x)$, não são soluções desta equação diferencial.

<u>Exemplo</u> – A substituição mostra que as funções $y = x^2$ e $y = 1$ são soluções da equação diferencial não linear $y''y - xy' = 0$, mas as seguintes funções $-x^2$ e $x^2 + 1$ não são soluções desta equação diferencial.

Problema de Valor Inicial. Solução Geral. Base.

Para uma equação diferencial de primeira ordem, uma solução geral envolvia uma constante arbitrária c, e num problema de valor inicial utilizava-se uma condição inicial $y(x_0) = y_0$ para encontrar uma solução particular na qual c assumia um valor determinado. A ideia de uma solução geral era encontrar todas as condições possíveis, e para equações lineares, éramos bem sucedidos, porque não existiam soluções singulares. Vamos estender agora esta ideia a equações de segunda ordem: para equações lineares homogéneas de segunda ordem $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, uma solução geral será da forma $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, uma combinação linear de duas soluções envolvendo duas constantes arbitrárias c_1, c_2. Um problema de valor inicial consiste agora na equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ e duas condições iniciais $y(x_0) = K_0$, $y'(x_0) = K_1$, estabelecendo valores K_0 e K_1 da solução e da sua derivada – declive da curva – para o mesmo valor x_0 dado no intervalo aberto considerado. Usaremos $y(x_0) = K_0$, $y'(x_0) = K_1$ para obter de $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ uma solução particular de

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, na qual c_1 e c_2 assumem valores definidos. Ilustremos isto com um exemplo simples que nos ajudará também a ver a necessidade de impor uma condição em y_1 e y_2 em $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

<u>Exemplo</u> – Resolva o problema de valor inicial $y'' - y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3$.

O primeiro passo da resolução consiste no seguinte: e^x e e^{-x} são soluções – já o vimos – e tomemos $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. 2º passo: da condição inicial, uma vez que $y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$, obtemos $y(0) = c_1 + c_2 = 5$, $y'(0) = c_1 - c_2 = 3$. Assim, $c_1 = 4$, $c \;\; = 1$. A resposta será então dada substituindo na condição geral $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ os valores obtidos, isto é, tem-se $y = 4e^x + e^{-x}$.

Nota: Se no exemplo acima tivessemos assumido $y_1 = e^x$ e $y_2 = le^x$, obtendo assim $y = c_1 e^x + c_2 le^x = (c_1 + c_2 l)e^x = y'$, a nossa solução não teria sido suficientemente geral para satisfazer as duas condições iniciais e resolver o problema. Vejamos porquê: y_1 e y_2 são proporcionais, $y_1 / y_2 = 1/l$, enquanto que os anteriores não o eram, $y_1 / y_2 = e^x / e^{-x} = 2e^x$. Esta é a questão principal, motivando as definições seguintes, bem como a sua importância em relação aos problemas de valor inicial.

Definição (Solução Geral. Base. Solução Particular.).

Uma *solução geral* de uma equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ num intervalo aberto I é uma solução $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ com y_1 e y_2 soluções não proporcionais de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I e c_1, c_2 constantes arbitrárias. y_1 e y_2 são então chamados uma *base* – ou *sistema fundamental* – de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I. Uma solução paticular de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I é obtida se tomarmos valores específicos para c_1 e c_2 em $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$. y_1 e y_2 são chamados proporcionais em I se $y_1 = ky_2$ ou $y_2 = ly_1$ se verificam para todo o x em I, onde k e l são números. Na verdade, podemos também formular a nossa definição de base em termos de *independência linear*. Dizemos que duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são *linearmente independentes* num intervalo onde são definidas se $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = 0$ em I implica $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, e dizemos que elas são linearmente dependentes em I se a equação também se verifica para algumas constantes k_1, k_2 não ambas nulas. Então, se $k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$, podemos dividir e resolver, obtendo $y_1 = -\frac{k_2}{k_1} y_2$ ou $y_2 = -\frac{k_1}{k_2} y_1$. Assim, y_1 e y_2 são proporcionais, enquanto que no caso de independência linear, não o são. Tem-se assim o seguinte: uma base de soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ num intervalo I é um par y_1, y_2 de soluções linearmente independentes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I.

Exemplo - e^x e e^{-x} no exemplo anterior formam uma base da equação diferencial $y'' - y = 0$ para todo o x. Assim uma solução geral é $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. A resposta obtida no exemplo anterior constitui uma solução particular da equação.

Na prática, utiliza-se normalmente uma solução geral para encontrar soluções particulares, através da imposição de duas condições iniciais, porque é a solução particular que descreve o comportamento único de um determinado sistema físico ou outro. Para já fixemos o seguinte: se os coeficientes p e q de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ e a função r são contínuas em algum intervalo I, então $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ tem uma solução geral em I, da qual se obtém a solução de qualquer problema de valor inicial $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$, $y(x_0) = K_0$, $y'(x_0) = K_1$ em I, que é única. $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ não tem *soluções singulares* – isto é, soluções não obtidas de uma solução geral.

Equações Homogéneas com Coeficientes Constantes.

Veremos aqui como resolver equações lineares homogéneas $y'' + ay' + by = 0$ cujos coeficientes a e b são constantes. Estas equações têm aplicações importantes, especialmente no que diz respeito a vibrações mecânicas e eléctricas. Para resolver $y'' + ay' + by = 0$, lembremos que uma equação diferencial linear de primeira ordem

$y' + ky = 0$ com k como coeficiente constante tem uma função exponencial como solução, $y = e^{-kx}$, o que nos dá a ideia de tentar como solução de $y'' + ay' + by = 0$ a função $y = e^{\lambda x}$. Substituindo $y = e^{\lambda x}$ e as derivadas $y' = \lambda e^{\lambda x}$ e $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ na equação $y'' + ay' + by = 0$, obtém-se $\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)e^{\lambda x} = 0$. Assim, $y = e^{\lambda x}$ é uma solução de $y'' + ay' + by = 0$, se λ é uma solução da equação quadrática $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Esta equação é chamada a *equação característica* – ou equação auxiliar – de $y'' + ay' + by = 0$. As suas raízes são $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 - 4b}\right)$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 - 4b}\right)$. A derivação mostra que as funções $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ são soluções de $y'' + ay' + by = 0$. Directamente de $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 - 4b}\right)$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 - 4b}\right)$ vemos que, dependendo do sinal do discriminante $a^2 - 4b$, obtém-se:

Caso I – 2 raízes reais se $a^2 - 4b > 0$

Caso II – uma raíz dupla real se $a^2 - 4b = 0$

Caso III – raízes conjugadas complexas se $a^2 - 4b < 0$

Caso I – Duas raízes reais distintas λ_1.e λ_2.

Neste caso, $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ constituem uma base de soluções de $y'' + ay' + by = 0$ num qualquer intervalo - porque y_1/y_2 não é constante. A correspondente solução geral é $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$.

<u>Exemplo</u> – Podemos agora resolver $y'' - y = 0$ de uma forma sistemática. A equação característica é $\lambda^2 - 1 = 0$. As suas raízes são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Assim, uma base é e^x e e^{-x} e, como anteriormente, tem-se a solução geral $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Caso II – Raíz real dupla $\lambda = -a/2$.

Quando o discriminante $a^2 - 4b = 0$, então $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 - 4b}\right)$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 - 4b}\right)$ permite apenas obter uma raíz $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -a/2$, obtendo-se inicialmente somente uma solução $y_1 = e^{-(a/2)x}$. Para encontrar uma segunda solução, necessária para uma base, utiliza-se o *método de redução de ordem*. Isto é, define-se $y_2 = uy_1$ e as suas derivadas $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ e $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ em $y'' + ay' + by = 0$. Obtém-se $\left(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''\right) +$ $+ a\left(u'y_1 + uy_1'\right) + buy_1 = 0$. Agrupando os termos, tem-se $u''y_1 + u'\left(2y_1' + ay_1\right) +$ $+ u\left(y_1'' + ay_1' + by_1\right) = 0$. A expressão no último parenteses é nula, uma vez que y_1 é uma solução de $y'' + ay' + by = 0$. A expressão no primeiro parenteses é nula, também, uma vez que $2y_1' = -ae^{-ax/2} = -ay_1$. Ficamos assim com $u''y_1 = 0$. Assim $u'' = 0$. Através de duas integrações, $u = c_1 x + c_2$. Para encontrar uma segunda solução independente $y_2 = uy_1$, pode simplesmente tornar-se $u = x$. Então $y_2 = xy_1$. Uma vez que estas soluções não são proporcionais, formam uma base. O resultado é que, no caso de uma raíz dupla de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ uma base de soluções de $y'' + ay' + by = 0$ em qualquer intervalo é $e^{-ax/2}$, $xe^{-ax/2}$. A correspondente solução geral é $y = \left(c_1 + c_2 x\right)e^{-ax/2}$.

<u>Exemplo</u> – Resolva $y'' + 8y' + 16y = 0$.

A equação característica tem a raíz dupla $\lambda = -4$. Assim uma base é e^{-4x} e xe^{-4x} e a correspondente solução geral é $y = \left(c_1 + c_2 x\right)e^{-4x}$.

Caso III – Raízes complexas. Função Exponencial Complexa.

Para equações diferenciais lineares homogéneas com coeficientes constantes $y'' + ay' + by = 0$ discutiremos o caso em que a equação característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

tem raízes $\lambda_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$ que são complexas. As duas equações anteriores (λ_1 e λ_2) mostram que isso acontece se o discriminante $a^2 - 4b$ é negativo. Neste caso, é prático retirar da raíz $\sqrt{-1} = i$ e $\frac{1}{2} = \sqrt{1/4}$ debaixo da raíz, escrevendo $\lambda_1 = -\frac{1}{2}a + i\omega$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}a - i\omega$ onde $\omega = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$. Podemos ver que $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ são agora soluções complexas de $y'' + ay' + by = 0$. No caso III, uma base de soluções reais de $y'' + ay' + by = 0$ em qualquer intervalo é $y_1 = e^{-ax/2}\cos\omega x$, $y_2 = e^{-ax/2}\sin\omega x$. Por diferenciação e substituição podemos ver que y_1 e y_2 acima constituem soluções da equação diferencial. $y_2/y_1 = \tan\omega x$ não é constante, pois $\omega \neq 0$, portanto y_1 e y_2 não são proporcionais. A correspondente solução geral é $y = e^{-ax/2}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$.

Exemplo – Encontre uma solução geral da equação $y'' - 2y' + 10y = 0$.

A equação característica $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ tem as raízes complexas conjugadas $\lambda_1 = 1 + \sqrt{1-10} = 1 + 3i$, $\lambda_2 = 1 - 3i$. Tem-se assim a base $y_1 = e^x \cos 3x$, $y_2 = e^x \sin 3x$ e a correspondente solução geral $y = e^x(A\cos 3x + B\sin 3x)$.

Função Exponencial Complexa.

Vamos simplesmente ver agora como podemos comprovar que y_1 e y_2 podem ser soluções no caso III. Mostraremos que isso deriva da função exponencial complexa.
A *função exponencial complexa* e^z de uma variável complexa $z = s + it$ é definida por $e^z = e^{s+it} = e^s(\cos t + i\sin t)$. Para z real igual a s, esta expressão torna-se a familiar função exponencial real e^s de *Análise* porque então $\cos t = \cos 0 = 1$ e $\sin t = \sin 0 = 1$. e^z tem propriedades bastante semelhantes às da função exponencial real; em particular, pode mostrar-se que é diferenciável e que satisfaz $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Isto pode ser suficiente para motivar a definição $e^z = e^{s+it} = e^s(\cos t + i\sin t)$. Nesta

expressão, tomamos agora $z = \lambda_1 x$ com $\lambda_1 = -\frac{1}{2}a + i\omega$. Tem-se assim $z = s + it = \lambda_1 x = -\frac{1}{2}ax + i\omega x$. Então de $e^z = e^{s+it} = e^s(\cos t + i\sin t)$ vem $e^{-(a/2)x + i\omega x} = e^{-(a/2)x}(\cos\omega x + i\sin\omega x)$. Similarmente, uma vez que $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, tem-se para $e^{\lambda_2 x}$, com $\lambda_2 = -\frac{1}{2}a - i\omega$, $e^{-(a/2)x - i\omega x} = e^{-(a/2)x}(\cos\omega x - i\sin\omega x)$. Adicionando as duas fórmulas e dividindo a soma por 2, encontramos à direita, como se viu atrás, $y_2 = e^{-ax/2}\sin\omega x$. Do teorema fundamental para a equação homogénea que vimos anteriormente segue-se que y_1 e y_2 são novamente soluções, o que confirma que $y = e^{-ax/2}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$ é uma solução geral de $y'' + ay' + by = 0$ no caso de raízes complexas. Lembramos que para $s = 0$, $e^{it} = \cos t + i\sin t$ é a chamada *fórmula de Euler*.

Exemplo – Resolva o problema de valor inicial $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

A equação característica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ tem as raízes complexas $-1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$. Tem-se assim $y(x) = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$. A primeira condição dá $y(0) = A = 1$. A derivada da solução geral é $y'(x) = e^{-x}(-A\cos 2x - B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$, e a segunda condição inicial permite obter, uma vez que $\sin 0 = 0$, $y'(0) = -A + 2B = -1 + 2B = 5$. Então $B = 3$ e a resposta é $y = e^{-x}(\cos 2x + 3\sin 2x)$.

Exemplo – Uma solução geral da equação $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega = \text{constante} \neq 0$, é $y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$. Para $\omega = 1$ tem-se o mesmo resultado que obteríamos anteriormente para $y'' + y = 0$, isto é, $y = c_1\cos x + c_2\sin x$.

É interessante que em aplicações em sistemas mecânicos ou circuitos eléctricos os três casos atrás correspondem a três formas diferentes de movimentos ou fluxos de corrente, respectivamente.

De seguida apresenta-se um resumo dos três casos:

Caso	Raízes de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$	Base de $y'' + ay' + by = 0$	Solução geral de $y'' + ay' + by = 0$
I	Distintas reais λ_1, λ_2	$e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
II	Real dupla $\lambda = -\frac{1}{2}a$	$e^{-ax/2}$, $xe^{-ax/2}$	$y = (c_1 + c_2 x)e^{-ax/2}$
III	Complexas conjugadas	$e^{-ax/2}\cos\omega x$ $e^{-ax/2}\sin\omega x$	$y = e^{-ax/2}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$

Problemas de Valor Fronteira.

As aplicações conduzem-nos por vezes a condições do tipo $y(P_1) = k_1$, $y(P_2) = k_2$. Estas são conhecidas por *condições fronteira*, uma vez que se referem aos pontos terminais P_1, P_2 - pontos fronteira P_1, P_2 - de um intervalo I no qual a equação $y'' + ay' + by = 0$ é considerada. A equação $y'' + ay' + by = 0$ e as condições $y(P_1) = k_1$, $y(P_2) = k_2$ em conjunto constituem o que é conhecido por *problema de valor fronteira*. Refere-se a seguir um exemplo típico:

<u>Exemplo</u> **–** Resolva o problema de valor fronteira $y'' + y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(\pi) = -3$.

Uma base é $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. A correspondente solução geral é $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$. A condição de fronteira esquerda dá $y(0) = c_1 = 3$. Da condição de fronteira direita vem $y(\pi) = c_1\cos\pi + c_2\cdot 0 = -3$. $\cos\pi = -1$ e $c_1 = 3$, portanto esta equação mantém-se e vemos que não gera qualquer condição para c_2. Assim uma solução do problema é $y = 3\cos x + c_2\sin x$. c_2 continua a ser arbitrário. Isto é uma surpresa. A razão, é claro, é que $\sin x$ é nulo em zero e π. Pode concluir-se que a solução de um problema de valor fronteira é único se e somente se nenhuma solução $y \neq 0$ de $y'' + ay' + by = 0$ satisfazer $y(P_1) = y(P_2) = 0$.

Equação de Euler-Cauchy.

As equações de coeficiente constante são resolvidas sem integração, como vimos. Similarmente, as *equações de Euler-Cauchy* $x^2y'' + axy' + by = 0$ podem ser também resolvidas puramente por manipulações algébricas. Na verdade, substituindo $y = x^m$ e as suas derivadas na equação diferencial $x^2y'' + axy' + by = 0$, tem-se $x^2m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$. Omitindo x^m, que não é nulo se $x \neq 0$, obtém-se as equações auxiliares $m^2 + (a-1)m + b = 0$.

Caso I – Raízes reais distintas.

Se as raízes m_1, m_2 de $m^2 + (a-1)m + b = 0$ são reais e distintas, então $y_1(x) = x^{m_1}$ e $y_2(x) = x^{m_2}$ constituem uma base de soluções da equação diferencial $x^2y'' + axy' + by = 0$ para todo o x para o qual estas funções são definidas. A correspondente solução geral é $y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$ (c_1, c_2 arbitrários).

<u>Exemplo</u> – Resolva a equação de Euler-Cauchy $x^2y'' - 2{,}5xy' - 2{,}0y = 0$.

A equação auxiliar é $m^2 - 3{,}5m - 2{,}0 = 0$. As raízes são $m_1 = -0{,}5$ e $m_2 = 4$. Assim uma base de soluções reais para todo o x positivo é $y_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y_2 = x^4$ e a correspondente solução geral para todo o x é $\frac{c_1}{\sqrt{x}} + c_2x^4$.

Caso II – Raízes duplas.

Se $m^2 + (a-1)m + b = 0$ tem uma raíz dupla $m = \frac{1}{2}(1-a)$, tem-se uma primeira solução $y_1 = x^{(1-a)/2}$ e uma segunda solução y_2 pelo método de redução de ordem. Assim, substituindo $y_2 = uy_1$ e as suas derivadas em $x^2y'' + axy' + by = 0$, obtém-se $x^2(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + ax(u'y_1 + uy_1') + buy_1 = 0$. O ordenamento dos termos dá

$u''x^2 y_1 + u'x(2xy_1' + ay_1) + u(x^2 y_1'' + axy_1' + by_1) = 0$. A última expressão é nula pois y_1 é uma solução de $x^2 y'' + axy' + by = 0$. De $y_1 = x^{(1-a)/2}$ tem-se na última expressão $2xy_1' + ay_1 = (1-a)x^{(1-a)/2} + ax^{(1-a)/2} = x^{(1-a)/2} = y_1$. Isto reduz a expressão $u''x^2 y_1 + u'x(2xy_1' + ay_1) + u(x^2 y_1'' + axy_1' + by_1) = 0$ a $(u''x^2 + u'x)y_1 = 0$. Dividindo por y_1 ($\neq 0$), separando as variáveis e integrando tem-se, para $x > 0$, $\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{x}$, $\ln|u'| = -\ln|x|$, $u' = \frac{1}{x}$, $u = \ln x$. Assim $y_2 = y_1 \ln x$, que não é proporcional a y_1. Então no caso de uma raíz dupla de $m^2 + (a-1)m + b = 0$, uma base de $x^2 y'' + axy' + by = 0$ para todo o x positivo é $y_1 = x^m$, $y_2 = x^m \ln x$ com $m = \frac{1}{2}(1-a)$, obtendo-se a solução geral $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{(1-a)/2}$ com c_1, c_2 arbitrários.

<u>Exemplo</u> – Resolva $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$.

A equação auxiliar tem a raíz dupla $m = 2$. Então uma base de soluções reais para todo o x positivo é x^2, $x^2 \ln x$, e a correspondente solução geral é $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^2$.

Caso III – Raízes complexas conjugadas.

Se as raízes m_1 e m_2 de $m^2 + (a-1)m + b = 0$ são complexas elas são também conjugadas, digamos $m_1 = \mu + i\nu$, $m_2 = \mu - i\nu$. Neste caso, uma base de soluções de $x^2 y'' + axy' + by = 0$ para todo o x positivo é $y_1 = x^\mu \cos(\nu \ln x)$, $y_2 = x^\mu \sin(\nu \ln x)$. Na verdade estas funções não são proporcionais, e são soluções de $x^2 y'' + axy' + by = 0$ por diferenciação e substituição. A correspondente solução geral é $y = x^\mu [A\cos(\nu \ln x) + B\sin(\nu \ln x)]$. Outra questão tem a ver com o facto de como se concluiu que y_1 e y_2 acima poderiam ser soluções. Para responder a isso vejamos o seguinte: a fórmula $x^k = \left(e^{\ln x}\right)^k = e^{k \ln x}$ verifica-se assim para k real até $k = i\nu$ e, juntamente com $e^z = e^{s+it} = e^s(\cos t + i\sin t)$ (com $s = 0$) vem

$x^{i\nu} = e^{i\nu \ln x} = \cos(\nu \ln x) + i\sin(\nu \ln x)$, $x^{-i\nu} = e^{-i\nu \ln x} = \cos(\nu \ln x) - i\sin(\nu \ln x)$. Agora multiplique-se por x^{μ} e adicione-se e subtraia-se. Tem-se $2y_1$ e $2iy_2$, respectivamente. Dividindo por 2 e por $2i$, tem-se $y_1 = x^{\mu}\cos(\nu \ln x)$, $y_2 = x^{\mu}\sin(\nu \ln x)$.

<u>Exemplo</u> – Resolva $x^2 y'' + 7xy' + 13y = 0$.

A equação auxiliar $m^2 + (a-1)m + b = 0$ é $m^2 + 6m + 13 = 0$. As raízes desta equação são $m_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm 2i$. Através de $y = x^{\mu}\left[A\cos(\nu \ln x) + B\sin(\nu \ln x)\right]$, a resposta é $y = x^{-3}\left[A\cos(2\ln x) + B\sin(2\ln x)\right]$.

Teoria da Existência e da Solução Única. Wronskiano.

Veremos uma teoria geral para equações lineares homogéneas $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ com coeficientes arbitrários variáveis p e q contínuos. Isto tem a ver com a existência de uma solução geral $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ bem como com problemas de valor inicial que consistem na equação anterior e em duas condições iniciais $y(x_0) = K_0$, $y'(x_0) = K_1$, com x_0, K_0 e K_1 dados.
O seguinte *Teorema da Existência e da Solução Única* para problemas de valor inicial é importante:

<u>Teorema</u> – Se $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas num qualquer intervalo I e x_0 pertence a I, então o problema de valor inicial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_0$, $y'(x_0) = K_1$ tem uma única solução $y(x)$ no intervalo I.

Não vamos aqui demonstrar este teorema pois seria uma demonstração longa.

Independência Linear de Soluções. Wronskiano.

O teorema acima tem implicações importantes de soluções gerais $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Como sabemos, estas são constituidas por uma base y_1 e y_2 dizem-se *linearmente independentes* no intervalo I se $k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = 0$ em I implicar $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ e dizemos que y_1 e y_2 são *linearmente dependentes* em I se esta equação também se mantiver para k_1, k_2 não simultaneamente nulos. Neste caso, e somente neste caso, y_1 e y_2 são proporcionais em I, isto é, $y_1 = ky_2$ ou $y_2 = ly_1$. Para esta discussão o critério de independência e dependência linear de soluções explicitado servirá de auxílio. Este critério utiliza o chamado *determinante wronskiano*, ou, mais brevemente, o *wronskiano*, de duas soluções y_1 e y_2 de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, definido por $W(y_1, \quad y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

<u>Teorema</u> – Suponha-se que $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ tem coeficientes $p(x)$ e $q(x)$ contínuos num intervalo aberto I. Então duas soluções y_1 e y_2 de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I são linearmente dependentes em I se e somente se o seu wronskiano W for nulo para algum x_0 em I. Para além disso, se $W = 0$ para $x = x_0$, então $W \equiv 0$ em I; assim se existe um x_1 em I para o qual $W \neq 0$, então y_1, y_2 são linearmente independentes em I.

<u>Demonstração</u> – Se y_1 e y_2 são linearmente dependentes em I em $y_1 = ky_2$ e $y_2 = ly_1$ verifica-se em I, obtendo-se para $y_1 = ky_2$, $W(y_1, \quad y_2) = W(ky_2, \quad y_2) =$

$= \begin{vmatrix} ky_2 & y_2 \\ ky_2' & y_2' \end{vmatrix} = ky_2 y_2' - y_2 ky_2' \equiv 0$ e similarmente para $y_2 = ly_1$.

Da mesma forma, assume-se que $W(y_1, \quad y_2) = 0$ para algum $x = x_0$ em I e mostra-se que y_1, y_2 são linearmente dependentes. Considere-se o sistema de equações lineares $\begin{cases} k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) = 0 \\ k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$ para k_1, k_2 desconhecidos. Agora este sistema é homogéneo e o seu determinante é exactamente o wronskiano

$W[y_1(x_0), \quad y_2(x_0)]$, que é nulo por admissão de hipótese. Assim o sistema tem uma solução k_1, k_2 onde k_1 e k_2 não são ambos nulos. Usando estes números k_1, k_2, introduzimos a função $y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$. Pelo teorema fundamental a função $y(x)$ é uma solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I. Do sistema de equações lineares atrás vemos que satisfaz as condições iniciais $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$. Agora outra solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ que satisfaça as mesmas condições iniciais é $y^* \equiv 0$. Uma vez que p e q são contínuas, o teorema anterior aplica-se e garante a solução única, isto é, $y \equiv y^*$, ou, escrevendo, $k_1 y_1 + k_2 y_2 \equiv 0$ em I. Uma vez que k_1 e k_2 não são ambos nulos, isto significa dependência linear de y_1, y_2 em I.

Prove-se a última afirmação do teorema. Se $W = 0$ num x_0 em I, tem-se dependência linear de y_1, y_2 em I pela última parte da demonstração, assim $W = 0$ pela primeira parte da demonstração. Então $W \neq 0$ num x_1 em I não pode acontecer no caso de dependência linear, de modo que $W \neq 0$ em x_1 implica independência linear.

Exemplo – Mostre que $y_1 = \cos \omega x$, $y_2 = \sin \omega x$ formam uma base de soluções de $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega \neq 0$, em qualquer intervalo.

A substituição mostra que são soluções e a independência linear segue-se do teorema, uma vez que $W(\cos \omega x, \quad \sin \omega x) = \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega(\cos^2 \omega x + \sin^2 \omega x) = \omega$.

Uma Solução Geral de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ Inclui Todas as Soluções.

Provaremos isto em duas etapas, mostrando primeiro que a solução geral existe sempre:

Teorema – Se os coeficientes $p(x)$ e $q(x)$ são contínuos num intervalo aberto I, então $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ tem uma solução geral em I.

Demonstração – Pelo penúltimo teorema, a equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ tem uma solução $y_1(x)$ em I satisfazendo as condições iniciais $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$ e uma solução $y_2(x)$ em I satisfazendo as condições iniciais $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$. Daqui vemos que o wronskiano $W(y_1,\ y_2)$ tem em x_0 o valor 1. Então y_1, y_2 são linearmente independentes em I, pelo último teorema; formam uma base se soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I, e $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ com c_1, c_2 arbitrários é uma solução geral de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I.

De seguida prova-se que uma solução geral de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ é tão geral como pode ser, nomeadamente, inclui todas as soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

Teorema – Suponha-se que $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ tem coeficientes $p(x)$ e $q(x)$ contínuos num intervalo aberto I. Então toda a solução $y = Y(x)$ de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I é da forma $Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ onde y_1, y_2 formam uma base de soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I e C_1, C_2 são constantes adequadas. Assim $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ não tem *soluções singulares* – isto é, soluções não obteníveis a partir de uma solução geral.

Demonstração – Pelo teorema acima, a nossa equação tem uma solução geral $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ em I. Temos que encontrar valores adequados de c_1, c_2 tais que $y(x) = Y(x)$ em I. Escolhe-se um determinado x_0 em I e mostra-se primeiro que podemos encontrar c_1, c_2 tais que $y(x_0) = Y(x_0)$, $y'(x_0) = Y'(x_0)$, ou, escrevendo, $c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = Y(x_0)$ e $c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = Y'(x_0)$. De facto, este é um sistema de equações lineares com c_1 e c_2 desconhecidos. O seu determinante é o wronskiano de y_1 e y_2 em $x = x_0$. Uma vez que $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é uma solução geral, y_1 e y_2 são linearmente independentes em I e portanto o seu wronskiano é diferente de zero. Assim o sistema tem uma única solução $c_1 = C_1$, $c_2 = C_2$ que pode ser obtido pela regra de Cramer. Utilizando estas constantes obtém-se de $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ a solução particular $y^*(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Uma vez que C_1, C_2 são soluções de $c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = Y(x_0)$ e $c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = Y'(x_0)$ e daqui vemos que $y^*(x_0) = Y(x_0)$, ${y^*}'(x_0) = Y'(x_0)$. Deste teorema e do teorema de solução única conclui-se que y^* e Y devem ser iguais em I, e a demonstração está completa.

Redução de Ordem: Como Obter Uma Segunda Solução?

Na tentativa de encontrar uma base de soluções, pode frequentemente encontrar-se uma solução por observação ou por algum método. Os casos que já vimos para equações de coeficientes constantes e equações de Euler-Cauchy foram apenas casos particulares de um método geral, o *método de redução de ordem* aplicável a qualquer equação. Seja y_1 uma solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ num intervalo I. Substitua-se $y_2 = uy_1$ e as suas derivadas $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ e $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ em $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ e ordenem-se os termos, obtendo $u''y_1 + u'(2xy_1' + py_1) + u(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0$. Uma vez que y_1 é solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, a expressão do último parenteses é nula. Dividindo a expressão que resta por y_1 e definindo $u' = U$. Então $u'' = U'$ e tem-se $U' + \left(\dfrac{2y_1'}{y_1} + p\right)U = 0$. Separando as variáveis e integrando, escolhendo a constante de integração de forma que seja nula - uma vez que não é necessária qualquer constante arbitrária - obtém-se $\ln|U| = -2\ln|y_1| - \int p\,dx$ e tirando os expoentes vem $U = \dfrac{1}{{y_1}^2} e^{-\int p\,dx}$. $U = u'$. Assim a segunda solução pretendida é $y_2 = uy_1 = y_1 \int U\,dx$.

Uma vez que $y_2 / y_1 = u = \int U\,dx$ não pode ser constante, vemos que y_1 e y_2 formam uma base.

<u>Exemplo</u> - $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ tem $y_1 = x$ como primeira solução. Encontre outra solução independente.

Define-se $y_2 = uy_1$ e usa-se $U = \frac{1}{{y_1}^2} e^{-\int pdx}$, é *crucial* que se escreva primeiro a equação na forma padrão, $y'' - \frac{2x}{x^2-1} y' + \frac{2}{x^2-1} y = 0$ porque $U = \frac{1}{{y_1}^2} e^{-\int pdx}$ foi derivada com base neste pressuposto. Então $-\int pdx = \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \ln\left|x^2-1\right|$. Assim $U = x^{-2}\left(x^2-1\right) = 1 - x^{-2}$ e $u = \int U dx = x + x^{-1}$. Assim, $y_2 = uy_1 = \left(x + x^{-1}\right)x = x^2 + 1$.

Equações Não Homogéneas.

Começamos agora a tratar de equações não homogéneas $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ onde $r(x) \not\equiv 0$. Antes de considerarmos os métodos de resolução, exploremos primeiro o que realmente é necessário para passarmos da correspondente equação homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ para a equação não homogénea. A *chave* que relaciona as duas e nos permite resolver a equação não homogénea é o seguinte teorema:

<u>Teorema</u> – A diferença de duas soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ num intervalo aberto I é uma solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. A soma de uma solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ em I e uma solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I é uma solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ em I.

Esta situação sugere os seguintes conceitos:

Solução Geral e Solução Particular.

Uma *solução geral* da equação não homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ num intervalo I é uma solução da forma $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ onde $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é uma solução geral da equação homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I e $y_p(x)$ é qualquer solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ em I não contendo constantes arbitrárias. Uma *solução particular* de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ em I é uma solução obtida de

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ atribuindo valores específicos às constantes arbitrárias c_1 e c_2 em $y_h(x)$. Se os coeficientes de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ e $r(x)$ são funções contínuas em I, então $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ tem uma solução geral em I porque $y_h(x)$ existe em I, e a existência de $y_p(x)$ será mostrada quando falarmos no método de variação de parâmetros. Um problema de valor inicial para $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ tem uma única solução em I. Na verdade, se são dadas as condições iniciais $y(x_0) = K_0$, $y'(x_0) = K_1$ e y_p foi determinado, existe, pelo teorema, uma solução única da equação homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ em I satisfazendo $\tilde{y}(x_0) = K_0 - y_p(x_0)$, $\tilde{y}'(x_0) = K_1 - y_p'(x_0)$ e $y = \tilde{y} + y_p$ é a única solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ em I satisfazendo as condições iniciais dadas. Para além disso, justificando a terminologia, demonstramos agora que uma solução geral de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ inclui todas as soluções; então a situação é a mesma que para a equação homogénea:

Teorema – Suponha-se que os coeficientes e $r(x)$ em $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ são contínuos num intervalo aberto I. Então toda a solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ em I é obtida atribuindo valores adequados às constantes arbitrárias numa solução geral $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ em I.

Conclusão – Para resolver a equação não homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ ou um problema de valor inicial para a equação anterior, temos que resolver a equação homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ e encontrar qualquer solução particular y_p de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

Exemplo – Resolva o problema de valor inicial $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$.

A equação característica $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ tem as raízes 1 e 3. Isto permite obter como solução geral da equação homogénea a equação $y_h = c_1e^x + c_2e^{3x}$. Uma vez que e^{-2x}

tem derivadas múltiplas de e^{-2x}, tenta-se como solução particular $y_p = Ce^{-2x}$. Então $y_p' = -2Ce^{-2x}$, $y_p'' = 4Ce^{-2x}$. Por substituição vem $4Ce^{-2x} = -4\left(-2Ce^{-2x}\right) + 3Ce^{-2x} =$ $= 10Ce^{-2x}$. Assim, $4C + 8C + 3C = 10$, $C = \dfrac{2}{3}$, e uma solução geral da equação não homogénea é $y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \dfrac{2}{3}e^{-2x}$. Por diferenciação, $y'(x) = c_1 e^x + 3c_2 e^{3x} - \dfrac{4}{3}e^{-2x}$ e das condições iniciais, vem $y(0) = c_1 + c_2 + \dfrac{2}{3} = 1$, $y'(0) = c_1 + 3c_2 - \dfrac{4}{3} = -3$. Tem-se $c_1 = 4/3$, $c_2 = -1$. Portanto, a solução particular que satisfaz as condições iniciais é $y = \dfrac{4}{3}e^x - e^{3x} + \dfrac{2}{3}e^{-2x}$.

Solução por Coeficientes Indeterminados.

Uma solução geral de uma equação linear não homogénea é uma soma da forma $y = y_h + y_p$ onde y_h é uma solução geral da equação homogénea correspondente e y_p é qualquer solução particular da equação não homogénea. Já vimos isto. Assim falta discutir métodos. Existe um método muito simples, especial, e de interesse prático, que discutiremos agora. É chamado o *método dos coeficientes indeterminados* e aplica-se a equações $y'' + ay' + by = r(x)$ com coeficientes constantes e membros direitos $r(x)$ especiais, nomeadamente, funções exponenciais, polinómios, cossenos, senos, ou somas ou produtos de tais funções. Este tipo de funções $r(x)$ têm derivadas similares à própria função $r(x)$, o que nos dá a ideia chave: escolhe-se para y_p uma forma parecida à de $r(x)$ e envolvendo coeficientes desconhecidos a serem determinados por substituição da escolha para y_p em $y'' + ay' + by = r(x)$. Seguem-se as regras do método:

<u>(A) Regra Básica</u> – Se $r(x)$ em $y'' + ay' + by = r(x)$ é uma das funções na primeira coluna da tabela abaixo, escolhe-se a função correspondente y_p na segunda coluna e

determina-se os seus coeficientes indeterminados por substituição de y_p e das suas derivadas em $y'' + ay' + by = r(x)$.

<u>(B) Regra da Modificação</u> – Se um termo escolhido para y_p é, por acaso, uma solução da equação homogénea correspondente para $y'' + ay' + by = r(x)$, então multiplica-se essa escolha de y_p por x - ou por x^2 se esta solução corresponde a uma raíz dupla da equação característica da equação homogénea.

<u>(C) Regra da Soma</u> – Se $r(x)$ é uma soma das funções listadas na tabela abaixo – primeira coluna – então escolhe-se para y_p a soma de funções nas linhas correspondentes da segunda coluna.

A regra básica diz-nos o que fazer em geral. A regra da modificação visa resolver as dificuldades que ocorrem no caso indicado. Temos sempre que resolver a equação homogénea primeiro. A regra da soma é utilizada se repararmos que a soma de duas soluções de $y'' + ay' + by = r(x)$ com $r = r_1$ e $r = r_2$, respectivamente, é uma solução de $y'' + ay' + by = r(x)$ com $r = r_1 + r_2$.

Método dos Coeficientes Indeterminados

Termo em $r(x)$	*Escolha para* y_p
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
$kx^n \; (n = 0,1,\ldots)$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k\cos\omega x$ $k\sin\omega x$	$K\cos\omega x + M\sin\omega x$
$ke^{ax}\cos\omega x$ $ke^{ax}\sin\omega x$	$e^{ax}(K\cos\omega x + M\sin\omega x)$

O método corrige-se a si mesmo no sentido de que uma escolha falsa de y_p ou uma com termos a menos levará a uma contradição, indicando normalmente a correcção necessária, e uma escolha com demasiados termos dará origem a um resultado correcto, com os coeficientes supérfluos acabando por se tornarem nulos.

<u>Exemplo</u> (regra A) – Resolva a equação não homogénea $y'' + 4y = 8x^2$.

A tabela sugere a escolha $y_p = K_2 x^2 + K_1 x + K_0$. Então $y_p'' = 2K_2$. Por substituição obtém-se $2K_2 + 4\left(K_2 x^2 + K_1 x + K_0\right) = 8x^2$. Equacionando os coeficientes de x^2, x e x^0 em ambos os lados, tem-se $4K_2 = 8$, $4K_1 = 0$, $2K_2 + 4K_0 = 0$. Assim, $K_2 = 2$, $K_1 = 0$, $K_0 = -1$. Então $y_p = 2x^2 - 1$, e uma solução geral de $y'' + 4y = 8x^2$ é $y = y_h + y_p = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x^2 - 1$.

<u>Exemplo</u> (regra B) – Resolva $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

A equação característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ tem as raízes 1 e 2. Assim $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Normalmente, a nossa escolha seria $y_p = Ce^x$. Mas podemos ver que e^x é uma solução da equação homogénea corespondendo a uma raíz – nomeadamente, 1. Assim a regra (B) sugere $y_p = Cxe^x$. Necessitamos $y_p' = C\left(e^x + xe^x\right)$, $y_p'' = C\left(2e^x + xe^x\right)$. Por substituição obtém-se $C(2+x)e^x - 3C(1+x)e^x + 2Cxe^x = e^x$. Os termos xe^x são anulados, restando $-Ce^x = e^x$. Então $C = -1$. Uma solução geral é $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x$.

<u>Exemplo</u> (regra B e regra C) – Resolva o problema de valor inicial $y'' - 2y' + y = $ $= (D-1)^2 y = e^x + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

A equação característica tem a raíz dupla $\lambda = 1$. Assim $y_h = (c_1 + c_2 x)e^x$. Determina-se uma solução particular y_p. Pela tabela, o termo x indica uma escolha de solução particular $K_1 x + K_0$. Uma vez que 1 é uma raíz dupla da equação característica $(\lambda - 1)^2 = 0$, pela regra (B) o termo e^x pede a solução particular $Cx^2 e^x$ (em vez de Ce^x). Tem-se $y_p = K_1 x + K_0 + Cx^2 e^x$. Substituindo isto em

$y'' - 2y' + y = (D-1)^2 y = e^x + x$ e simplificando a expressão, obtemos $y_p'' - 2y_p' + y_p = 2Ce^x + K_1 x - 2K_1 + K_0 = e^x + x$. Então $C = \frac{1}{2}$, $K_1 = 1$, $K_0 = 2$ e uma solução geral de $y'' - 2y' + y = (D-1)^2 y = e^x + x$ é $y = y_h + y_p =$ $= (c_1 + c_2 x)e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x + x + 2$. Para entrarmos com as condições iniciais, precisamos também de $y' = (c_1 + c_2 + c_2 x)e^x + \left(x + \frac{1}{2}x^2\right)e^x + 1$. Assim $y(0) = c_1 + 2 = 1$, $c_1 = -1$; $y'(0) = c_1 + c_2 + 1 = 0$, $c_2 = 0$;. A resposta é assim $y = e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 e^x + x + 2$.

Método de Variação de Parâmetros

O último método que vimos é simples e tem importantes aplicações em Engenharia, mas aplica-se apenas a equações de coeficientes constantes com membros direitos $r(x)$ especiais. O método que estudaremos de seguida, o chamado *método de variação de parâmetros*, que é completamente geral; isto é, aplica-se a equações $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ com funções variáveis arbitrárias p, q e r que são contínuas num intervalo I. O método permite obter uma solução particular y_p de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ em I na forma $y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx$ onde y_1, y_2 formam uma base de soluções da equação homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ correspondendo a $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ e $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ é o wronskiano de y_1, y_2.

Na prática, este método é muito mais complicado o que o anterior, devido às integrações.

Vejamos primeiro um exemplo ao qual o método anterior não se aplica.

<u>Exemplo</u> – Resolva a equação diferencial $y'' + y = \sec x$.

Uma base de soluções da equação homogénea em qualquer intervalo é $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Obtém-se o wronskiano $W(\cos x, \quad \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos x \cos x -$ $-(-\sin x)\sin x = 1$. Assim de $y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx$, escolhendo as constantes de integração de modo a serem nulas, obtém-se a solução particular $y_p = -\cos x \int \sin x \sec x dx + \sin x \int \cos x \sec x dx$, isto é $y_p = -\cos x \int \sin x \frac{1}{\cos x} dx +$ $+ \sin x \int \cos x \frac{1}{\cos x} dx = -\cos x \int \tan x dx + \sin x \cdot x = -\cos x \ln|\sec x| + x \sin x$ e então $y_p = -\cos x \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + x \sin x = -\cos x \ln\left|\cos^{-1} x\right| + x \sin x = -\cos x \ln|\cos x|^{-1} + x \sin x =$ $= -(-\cos x \ln|\cos x|) + x \sin x = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$, obtido da equação dada. Obtém-se a solução geral $y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x =$ $= (c_1 + \ln|\cos x|)\cos x + (c_2 + x)\sin x$.

Explanação do Método.

A continuidade de p e q implica que a equação homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ tem uma solução geral $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ em I. O método de variação de parâmetros implica substituir as constantes c_1 e c_2 - aqui consideradas como *parâmetros* em y_h - por funções $u(x)$ e $v(x)$ a serem determinadas de modo a que a função resultante $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ é uma solução particular de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ em I. Diferenciando $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ obtemos $y_p' = u'y_1 + uy_1' + v'y_2 + vy_2'$. Agora $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ contém duas soluções u e v, mas o requisito de que y_p satisfaça $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ impõe apenas uma condição em u e v. Assim parece plausível que possamos impor uma segunda condição arbitrária. Na verdade, veremos que podemos determinar u e v tais que y_p satisfaça $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ e u e v satisfaçam como segunda condição a relação $u'y_1 + vy_2' = 0$. Isto reduz a expressão para y_p' à forma $y_p' = uy_1' + vy_2'$. Diferenciando esta função tem-se $y_p'' = u'y_1' + uy''_1 + v'y_2' + vy''_2$.

Substituindo $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$, $y_p' = uy_1' + vy_2'$ e $y_p'' = u'y_1' + uy''_1 + {}$ $+ v'y_2' + vy''_2$ em $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ e ordenando os termos que contém v, obtemos prontamente $u(y_1'' + py_1' + qy_1) + v(y_2'' + py_2' + qy_2) + u'y_1' + v'y_2' = r$. Uma vez que y_1 e y_2 são soluções da equação homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, isto reduz-se a $u'y_1' + v'y_2' = r$. Já tinhamos chegado a $u'y_1 + vy_2' = 0$. Temos assim um sistema linear de duas equações algébricas para as funções desconhecidas u' e v'. A solução é obtida através da *regra de Cramer* ou como se segue: multiplica-se a primeira equação por $-y_2$ e a segunda por y_2' e adiciona-se para obter $u'(y_1y_2' - y_2y_1') = -y_2r$ onde W é o wronskiano $(W = y_1y_2' - y_1'y_2)$ de y_1, y_2. Agora multiplica-se a primeira equação por y_1 e a segunda por $-y_1'$ e adiciona-se para obter $v'(y_1y_2' - y_2y_1') = y_1r$, assim $v'W = y_1r$. A divisão por $W \neq 0$ - se y_1, y_2 formam uma base $W \neq 0$ - origina $u' = -\dfrac{y_2r}{W}$, $v' = \dfrac{y_1r}{W}$. Por integração $u = -\displaystyle\int \frac{y_2r}{W}dx$, $v = \displaystyle\int \frac{y_1r}{W}dx$. Estes integrais existem porque $r(x)$ é contínua. Substituindo-os em $y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ obtemos $y_p(x) = -y_1\displaystyle\int \frac{y_2r}{W}dx + y_2\int \frac{y_1r}{W}dx$. Isto completa a derivação.

Atenção! – Antes de aplicar $y_p(x) = -y_1\displaystyle\int \frac{y_2r}{W}dx + y_2\int \frac{y_1r}{W}dx$, a equação deve estar na forma padrão $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ com y'' como primeiro termo. Temos que dividir por $f(x)$ se tivermos $f(x)y''$.