Capítulo IV

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Capítulo IV

O método das *transformadas de Laplace* resolve equações diferenciais e correspondentes problemas de valor inicial e problemas de valor fronteira. O processo de solução consiste em três passos principais:

- *Primeiro passo* – O *difícil* problema dado é transformado numa equação *simples – equação subsidiária*.
- *Segundo passo* – A equação subsidiária é resolvida puramente por manipulações algébricas.
- *Terceiro passo* – A solução da equação subsidiária é transformada novamente para obter a solução do problema dado.

Deste modo, a transformada de Laplace reduz o problema da resolução de uma equação diferencial num problema algébrico. O terceiro passo é simplificado por tabelas, cujo objectivo é similar ao das tabelas de integrais na integração. Esta permuta entre operações de cálculo e operações algébricas nas transformadas é chamada *cálculo operacional*, uma área muito importante em matemática aplicada, e o método da transformada de Laplace é praticamente o método mais importante para este propósito. Na verdade, as transformadas de Laplace têm numerosas aplicações na Engenharia, sendo particularmente úteis em problemas onde a força motriz – mecânica ou eléctrica – tem descontinuidades, é impulsiva ou periódica mas não meramente uma função seno ou cosseno. Outra vantagem é que o método resolve problemas directamente. Na verdade, os problemas de valor inicial são resolvidos sem determinar primeiro uma solução geral. Similarmente, as equações não homogéneas são resolvidas sem primeiro responder à correspondente equação homogénea.

Transformada de Laplace. Antitransformada. Linearidade.

Seja $f(t)$ uma função dada que é definida para todo o $t \geq 0$. Multiplica-se $f(t)$ por e^{-st} e integra-se em relação a t de zero até ao infinito. Então, se o integral resultante existe – isto é, tem algum valor finito - é uma função de s, digamos, $F(s)$:

$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$. Esta função $F(s)$ da variável s é chamada a *transformada de Laplace* da função original $f(t)$, e será notada por $\mathbf{L}(f)$. Assim $F(s)=\mathbf{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$. Portanto lembremos: a função dada depende de t e a nova função – a sua transformada – depende de s. A operação descrita, que origina $F(s)$ a partir de $f(t)$, é também chamada a *transformada de Laplace*. Para além disso, a função original $f(t)$ em $F(s)=\mathbf{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ é chamada a transformada inversa, antitransformada ou inversa de $F(s)$ e será notada por $\mathbf{L}^{-1}(f)$; isto é, escreveremos $f(t)=\mathbf{L}^{-1}(F)$.

Notação – As funções originais são notadas por letras minúsculas e as suas transformadas pelas mesmas letras em maísculas, de modo a que $F(s)$ representa a transformada de $f(t)$ e $Y(s)$ representa a transformada de $y(t)$, e assim sucessivamente.

<u>Exemplo</u> – Seja $f(t)=1$ quando $t\geq 0$. Encontre $F(s)$.

De $F(s)=\mathbf{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ obtemos por integração $\mathbf{L}(f)=\mathbf{L}(1)=\int_0^\infty e^{-st}dt=$ $=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty$; assim, quando $s>0$, $\mathbf{L}(1)=\frac{1}{s}$. O integral com intervalo de integração entre zero e ∞ é chamado um integral impróprio e, por definição, é calculado de acordo com a regra $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$. Assim a nossa notação significa

$$\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_o^T=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}+\frac{1}{s}e^0\right]=\frac{1}{s}\ (s>0).$$

<u>Exemplo</u> – Seja $f(t)=e^{at}$ quando $t\geq 0$, onde a é uma constante. Encontre $\mathbf{L}(f)$.

Novamente por $F(s)=\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, $\mathcal{L}\left(e^{at}\right)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\frac{1}{a-s}e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty$;

então, quando $s-a>0$, $\mathcal{L}\left(e^{at}\right)=\frac{1}{s-a}$.

Será que devemos continuar deste modo e obter a transformada de uma função após outra directamente a partir da definição? Não! A razão é que a transformada de Laplace tem muitas propriedades gerais que são úteis para este propósito. Acima de tudo, a transformada de Laplace é uma *operação linear* tal como a diferenciação e integração. Significa que:

<u>Teorema</u> – A transformada de Laplace é uma operação linear, isto é, para quaisquer funções $f(t)$ e $g(t)$ cujas transformadas de Laplace existam e quaisquer constantes a e b, $\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}$.

<u>Demonstração</u> – Por definição, $\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right]dt=$

$$a\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt+b\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

<u>Exemplo</u> – Seja $f(t)=\cosh at=\left(e^{at}+e^{-at}\right)/2$. Encontre $\mathcal{L}(f)$.

A partir do teorema anterior e do exemplo anterior obtemos $\mathcal{L}(\cosh at)=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{at}\right)+\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{-at}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right)$; isto é, quando $s>a$ (≥ 0),

$\mathcal{L}(\cosh at)=\frac{s}{s^2-a^2}$.

<u>Exemplo</u> – Seja $F(s)=\frac{1}{(s-a)(s-b)}$, $a\neq b$. Encontre $\mathcal{L}^{-1}(F)$.

O inverso de uma transformação linear é linear. Por redução de fracção parcial obtemos assim do penúltimo exemplo $\mathcal{L}^{-1}(F)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right)\right\}=$ $=\frac{1}{a-b}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-b}\right)\right]=\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$, o que prova a 11ª fórmula apresentada no fim deste capítulo.

<u>Exemplo</u> – Seja $F(s)=\frac{s}{(s-a)(s-b)}$, $a\neq b$. Encontre $\mathcal{L}^{-1}(F)$.

Utilizando a ideia do exemplo anterior, obtemos $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right\}=$ $=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right)\right\}=\frac{1}{a-b}\left(ae^{at}-be^{bt}\right)$.

Uma pequena lista de algumas funções elementares importantes e das suas transformações de Laplace é dada na tabela que se segue. Uma lista mais extensa virá no fim. Uma vez sabidas as transformadas abaixo, quase todas as transformadas que necessitaremos podem ser obtidas através da utilização de alguns teoremas simples que veremos. As três primeiras fórmulas da tabela são casos especiais da quarta fórmula. Esta última é provada por indução como se segue. Verifica-se para $n=0$ devido ao primeiro exemplo e $0!=1$. Veremos agora a hipótese de indução que se verifica para qualquer inteiro positivo. De $F(s)=\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ obtemos a integração por partes $\mathcal{L}\left(t^{n+1}\right)=\int_0^\infty e^{-st}t^{n+1}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}t^{n+1}\Big|_0^\infty+\frac{(n+1)}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n}dt$. A parte livre do integral é zero para $t=0$ e para $t\to\infty$. O lado direito é igual a $(n+1)\mathcal{L}\left(t^n\right)/s$. Daqui e da hipótese de indução obtemos $\mathcal{L}\left(t^{n+1}\right)=\frac{n+1}{s}\mathcal{L}\left(t^n\right)=\frac{(n+1)n!}{s\cdot s^{n+1}}=\frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$. Isto prova a 4ª fórmula.

Algumas funções $f(t)$ *e suas transformadas de Laplace* $\mathcal{L}(f)$

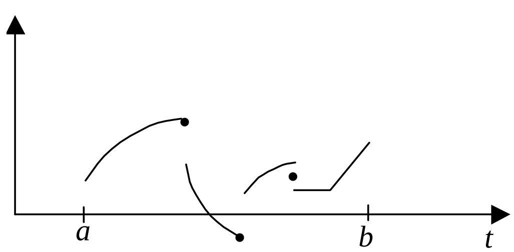
	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$		$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$1/s$	6	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
2	t	$1/s^2$	7	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
3	t^2	$2!/s^3$	8	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
4	t^n $(n=0,1,\ldots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	9	$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
5	t^a (a positivo)	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	10	$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$

$\Gamma(a+1)$ na fórmula 5 é a chamada *função gama* e obtemos a fórmula 5 a partir de $F(s)=\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, definindo $st=x$: $\mathcal{L}(t^a)=\int_0^\infty e^{-st}t^a dt=\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{dx}{s}=$ $=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^a dx=\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, $s>0$, porque o último integral é precisamente o que define $\Gamma(a+1)$. Note-se que $\Gamma(n+1)=n!$ quando n é um inteiro não negativo, de modo a que a fórmula 4 também se segue à fórmula 5. A fórmula 6 foi demonstrada no segundo exemplo. Para demonstrar as fórmulas 7 e 8, definimos $a=i\omega$ na fórmula 6. Então $\mathcal{L}(e^{i\omega t})=\frac{1}{s-i\omega}=\frac{s+i\omega}{(s-i\omega)(s+i\omega)}=\frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}+i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

Por outro lado, pelo teorema anterior e $e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t$, vem $\mathcal{L}(e^{i\omega t})=\mathcal{L}(\cos\omega t+i\sin\omega t)=\mathcal{L}(\cos\omega t)+i\mathcal{L}(\sin\omega t)$. Equacionando as partes real e imaginária destas duas equações, obtemos as fórmulas 7 e 8. A fórmula 9 foi demonstrada no terceiro exemplo, e a fórmula 10 pode ser demonstrada de uma forma similar.

Existência de Transformadas de Laplace.

Concluindo esta parte introdutória, deveríamos dizer algo quanto à existência da transformada de Laplace: Para um s fixo o integral em $F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ existirá se todo o integrando $e^{-st} f(t)$ tende para zero suficientemente rápido à medida que $t \to \infty$, digamos, pelo menos como uma função exponencial com expoente negativo. Isto origina a desigualdade $|f(t)| \le Me^{\gamma t}$ abaixo no subsequente teorema de existência. $f(t)$ não necessita de ser contínua. Isto é de importância prática uma vez que as entradas descontínuas – forças motrizes – são precisamente aquelas para as quais o método da transformada de Laplace se torna particularmente útil. É suficiente que $f(t)$ seja contínua por partes em todo o intervalo finito na gama $t \ge 0$. Por definição, uma função $f(t)$ é *contínua por partes* num intervalo finito $a \le t \le b$ se $f(t)$ é definida nesse intervalo e é tal que o intervalo pode ser subdividido em muitos intervalos finitos, em cada um dos quais $f(t)$ é contínua e tem limites finitos à medida que t se aproxima de cada um dos pontos finais do intervalo de subdivisão a partir do interior. Segue-se desta definição que os saltos finitos são as únicas descontinuidades que uma função contínua por partes pode ter; estas são conhecidas como *descontinuidades ordinárias*. A figura ao lado mostra um exemplo de uma função contínua por partes, onde os pontos marcam os valores da função nos saltos. A classe de funções contínuas por partes inclui todas as funções contínuas.



Teorema – Seja $f(t)$ uma função que é contínua por partes em todo o intervalo finito na gama $t \ge 0$ e que satisfaz $|f(t)| \le Me^{\gamma t}$ - para todo $t \ge 0$ - e para algumas constantes γ e M. Então a transformada de Laplace de $f(t)$ existe para $s > \gamma$.

Demonstração – Uma vez que $f(t)$ é contínua por partes, $e^{-st} f(t)$ é integrável sobre qualquer intervalo finito no eixo dos t. De $|f(t)| \le Me^{\gamma t}$, assumindo que $s > \gamma$, obtemos $\left|\boldsymbol{L}(f)\right| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \le \int_0^\infty \left|f(t)\right| e^{-st}dt \le \int_0^\infty Me^{\gamma t}e^{-st}dt = \dfrac{M}{s-\gamma}$ onde a condição $s > \gamma$ foi necessária para a existência do último integral.

As condições deste último teorema são suficientes para a maior parte das aplicações e é fácil de descobrir se uma dada função satisfaz uma desigualdade da forma $\left|f(t)\right| \le Me^{\gamma t}$.

Por exemplo, $\cosh t < e^t$, $t^n < n!e^t$ $(n = 0,1,\dots)$ – para todo o $t > 0$ - e qualquer função limitada em valor absoluto para todo o $t \ge 0$, tal como as funções seno e cosseno de uma variável real, satisfaz aquela condição. Um exemplo de uma função que não satisfaz uma relação da forma $\left|f(t)\right| \le Me^{\gamma t}$ é a função exponencial e^{t^2}, porque, não interessando se M e γ escolhidos sejam em $\left|f(t)\right| \le Me^{\gamma t}$ muito grandes, verifica-se que $e^{t^2} > Me^{\gamma t}$ para todo o $t > t_0$, onde t_0 é um número suficientemente grande, dependendo de M e γ. Deve frisar-se que as condições no teorema anterior são suficientes em vez de necessárias. Por exemplo, a função $1/\sqrt{t}$ é infinita para $t = 0$, mas a sua transformada existe; de facto, a partir da definição e $\Gamma\left(1/2\right) = \sqrt{\pi}$ obtemos $\boldsymbol{L}\left(t^{-1/2}\right) = \int_0^\infty e^{-st}t^{-1/2}dt = \dfrac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}dx = \dfrac{1}{\sqrt{s}}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$.

Solução única – Se a transformada de Laplace de uma dada função existe, é determinada de modo único. Consequentemente, pode mostrar-se que se duas funções – ambas definidas no eixo real positivo – têm a mesma transformada, estas funções não podem diferir em vários pontos isolados. Uma vez que não tem importância nas aplicações, podemos dizer que a inversa de uma dada transformada é essencialmente única. Em particular, se duas funções contínuas têm a mesma transformada, elas são completamente idênticas.

Transformadas de Derivadas e Integrais.

Discutiremos e aplicaremos agora a propriedade mais crucial da transformada de Laplace, nomeadamente, falando um pouco grosseiramente, que a diferenciação de funções corresponde à multiplicação das transformadas por s. Assim, *a transformada de Laplace substitui operações de cálculo por operações de álgebra em transformadas*. Isto é resumidamente, a ideia básica de Laplace, pela qual o devemos admirar.

O primeiro teorema diz respeito à diferenciação de $f(t)$ e o segundo à extensão a derivadas de ordem superior:

<u>Teorema</u> – Suponha-se que $f(t)$ é contínua para todo o $t \geq 0$, satisfaz $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, para algum γ e M, e tem uma derivada $f'(t)$ que é contínua por partes em cada intervalo finito na gama $t \geq 0$. Então a transformada de Laplace da derivada $f'(t)$ existe quando $s > \gamma$, e $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$.

<u>Demonstração</u> – Consideraremos primeiro o caso quando $f'(t)$ é contínua para todo o $t \geq 0$. Então pela definição e por integração por partes, $\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Uma vez que f satisfaz $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, a parte integrada à direita é zero no limite superior quando $s > \gamma$, e no limite inferior é $-f(0)$. O último integral é $\mathcal{L}(f)$, sendo a existência para $s > \gamma$ uma consequência do último teorema antes do que demonstramos agora. Isto prova que a expressão à direita existe quando $s > \gamma$, e é igual a $-f(0) + s\mathcal{L}(f)$. Consequentemente, $\mathcal{L}(f')$ existe quando $s > \gamma$, e $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$ verifica-se. Se a derivada $f'(t)$ é meramente contínua por partes, a demonstração é bastante similar; neste caso, a gama de integração no original deve ser separada em partes tais que f' é contínua em cada uma das partes.

Nota – Este teorema pode aplicar-se também a funções contínuas por partes $f(t)$, mas em vez de $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$, obtemos a fórmula $\mathcal{L}(f') = $ $= s\mathcal{L}(f) - f(0) - [f(a+0) - f(a-0)]e^{-as}$. Aplicando $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$ à segunda derivada $f''(t)$ obtemos $\mathcal{L}(f'') = s\mathcal{L}(f') - f'(0) = s[s\mathcal{L}(f) - f(0)] - f'(0)$; isto é, $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$. Similarmente, $\mathcal{L}(f''') = s^3\mathcal{L}(f) - s^2 f(0) -$

$-sf'(0)-f''(0)$, etc. Por indução obtemos assim a seguinte extensão do Teorema anterior:

Teorema – Sejam $f(t)$ e suas derivadas $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$, funções contínuas para todo o $t \geq 0$, satisfazendo $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, para algum γ e M, e seja a derivada $f^{(n)}(t)$ contínua por partes em todo o intervalo finito na gama $t \geq 0$. Então a transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$ existe quando $s > \gamma$, e é dada por $\boldsymbol{L}\left(f^{(n)}\right) = s^n \boldsymbol{L}(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$.

Exemplo – Seja $f(t) = t^2$. Encontre $\boldsymbol{L}(f)$.

Uma vez que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(t) = 2$, e $\boldsymbol{L}(2) = 2\boldsymbol{L}(1) = 2/s$, obtemos de $\boldsymbol{L}(f'') = s^2\boldsymbol{L}(f) - sf(0) - f'(0)$, $\boldsymbol{L}(f'') = \boldsymbol{L}(2) = \dfrac{2}{s} = s^2\boldsymbol{L}(f)$. Assim $\boldsymbol{L}(t^2) = \dfrac{2}{s^3}$, de acordo com a fórmula da tabela. O exemplo é típico, demonstrando que em geral existem várias maneiras de obter as transformadas das funções dadas.

Exemplo – Deduza as transformadas de Laplace de $\cos \omega t$ e $\sin \omega t$.

Seja $f(t) = \cos \omega t$. Então $f''(t) = -\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 f(t)$. $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Daqui e de $\boldsymbol{L}(f'') = s^2\boldsymbol{L}(f) - sf(0) - f'(0)$, vem $-\omega^2 f(t) = \boldsymbol{L}(f'') = s^2\boldsymbol{L}(f) - s$, então $\boldsymbol{L}(f) = \boldsymbol{L}(\cos \omega t) = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$. Similarmente para $g(t) = \sin \omega t$. Então $g(0) = 0$, $g'(0) = \omega$, e $-\omega^2\boldsymbol{L}(g) = \boldsymbol{L}(g'') = s^2\boldsymbol{L}(g) - \omega$, assim $\boldsymbol{L}(g) = \boldsymbol{L}(\sin \omega t) = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$.

Exemplo – Seja $f(t) = t \sin \omega t$. Encontre $\boldsymbol{L}(f)$.

Tem-se $f(0) = 0$ e $f'(t) = \sin \omega t + \omega t \cos \omega t$, $f'(0) = 0$; $f''(t) = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 t \sin \omega t = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 f(t)$, portanto através de $\boldsymbol{L}(f'') = s^2\boldsymbol{L}(f) - sf(0) - f'(0)$ tem-se $\boldsymbol{L}(f'') = 2\omega\boldsymbol{L}(\cos \omega t) - \omega^2\boldsymbol{L}(f) = s^2\boldsymbol{L}(f)$. Utilizando a fórmula de $\cos \omega t$

para a transformada de Laplace obtemos $\left(s^2+\omega^2\right)\mathcal{L}(f)=2\omega\mathcal{L}(\cos\omega t)=\dfrac{2\omega s}{s^2+\omega^2}$.

Assim, o resultado é $\mathcal{L}(t\sin\omega t)=\dfrac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$.

Equações Diferenciais. Problemas de Valor Inicial.

Consideremos um problema de valor inicial $y''+ay'+by=r(t),\quad y(0)=K_0$, $y'(0)=K_1$, com constantes a e b. Aqui $r(t)$ é a *entrada* – força motriz – aplicada ao sistema e $y(t)$ é a *saída* – resposta ao sistema. No método de Laplace tem-se três passos:

- *Primeiro passo* – Transformamos $y''+ay'+by=r(t),\quad y(0)=K_0,\quad y'(0)=K_1$ através de $\mathcal{L}(f')=s\mathcal{L}(f)-f(0)$ e $\mathcal{L}(f'')=s^2\mathcal{L}(f)-sf(0)-f'(0)$, escrevendo $Y=\mathcal{L}(y)$ e $R=\mathcal{L}(r)$. Isto dá $\left[s^2Y-sy(0)-y'(0)\right]+a\left[sY-y(0)\right]+bY=R(s)$ e é chamada a *equação subsidiária*. Ordenando os termos em Y, tem-se $\left(s^2+as+b\right)Y=(s+a)y(0)+y'(0)+R(s)$.
- *Segundo passo* – A divisão por s^2+as+b e a utilização da chamada *função de transferência*, também conhecida por H, $Q(s)=\dfrac{1}{s^2+as+b}$ dá-nos a solução da equação subsidiária $Y(s)=\left[(s+a)y(0)+y'(0)\right]Q(s)+R(s)Q(s)$. Se $y(0)=y'(0)=0$, isto é simplesmente $Y=RQ$; assim Q é o quociente $Q=\dfrac{Y}{R}=\dfrac{\mathcal{L}(\text{saída})}{\mathcal{L}(\text{entrada})}$ e isto explica o nome Q. Note-se que Q depende somente de a e b, mas não de $r(t)$ nem das condições iniciais.
- *Terceiro passo* – Reduz-se $Y(s)=\left[(s+a)y(0)+y'(0)\right]Q(s)+R(s)Q(s)$, normalmente por fracções parciais, como no cálculo integral, a uma soma de termos cujos inversos podem ser encontrados através da tabela, de forma que a solução $y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)$ de $y''+ay'+by=r(t),\quad y(0)=K_0,\quad y'(0)=K_1$ seja obtida.

<u>Exemplo</u> – Resolva $y'' - y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

De $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$ e da tabela anterior tem-se a equação subsidiária $s^2Y - sy(0) - y'(0) - Y = 1/s^2$, assim, $(s^2 - 1)Y = s + 1 + 1/s^2$. A função de transferência é $Q = 1/(s^2 - 1)$ e $Y(s) = [(s + a)y(0) + y'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)$ fica $Y = (s+1)Q + \dfrac{1}{s^2}Q = \dfrac{s+1}{s^2-1} + \dfrac{1}{s^2(s^2-1)} = \dfrac{1}{s-1} + \left(\dfrac{1}{s^2-1} - \dfrac{1}{s^2}\right)$. Desta expressão para Y e da tabela obtemos a solução $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} = e^t + \sinh t - t$.

O diagrama seguinte resume a nossa aproximação:

Método da transformada de Laplace

Espaço t		Espaço s
Problema dado $y'' - y = t$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$	$\rightarrow$	Equação subsidiária $(s^2 - 1)Y = s + 1 + 1/s^2$
		$\downarrow$
Solução do problema dado $y(t) = e^t + \sinh t - t$	$\leftarrow$	Solução da equação subsidiária $Y = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{s^2-1} - \dfrac{1}{s^2}$

Na prática, em vez de justificarmos o uso das fórmulas e teoremas neste método, verifica-se simplesmente no fim se $y(t)$ satisfaz a equação e condições iniciais dadas. As vantagens deste método são essencialmente duas: não há determinação de uma solução geral da equação homogénea; não há determinação de valores para constantes arbitrárias numa solução geral.

Problemas de alteração dos dados é um nome curto para problemas de valor inicial nos quais as condições iniciais se referem a um instante mais tardio do que $t = 0$. O exemplo mais simples seguinte explica como resolver um problema destes pela transformada de Laplace.

<u>Exemplo</u> – Resolva o problema de valor inicial $y'' + y = 2t,\quad y\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi,$ $y'\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2 - \sqrt{2}$.

Podemos ver que $y = A\cos t + B\sin t + 2t$ é uma solução geral, e sabemos como deveríamos proceder daqui em diante para entrar com as condições iniciais. O que vamos aprender é como é que podemos continuar com a transformada de Laplace embora $y(0)$ e $y'(0)$ sejam desconhecidos:

1º passo (estabelecimento da equação subsidiária) – De $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$ e da tabela obtemos $s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y = 2/s^2$.

2º passo (solução da equação subsidiária) – Resolvendo algebricamente e usando fracções parciais tem-se $Y = \frac{2}{(s^2+1)s^2} + y(0)\frac{s}{(s^2+1)} + y'(0)\frac{1}{s^2+1} = 2\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) +$ $+ y(0)\frac{s}{(s^2+1)} + y'(0)\frac{1}{s^2+1}$.

3º passo (solução do problema dado) – Da tabela vem $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$ na forma $y(t) = 2t + y(0)\cos t + [y'(0) - 2]\sin t = 2t + A\cos t + B\sin t$ - onde $A = y(0)$ e $B = y'(0) - 2$, mas isto já não tem interesse. A primeira condição inicial origina $y\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi + A/\sqrt{2} + B/\sqrt{2} = \frac{1}{2}\pi$, assim $B = -A$. Por diferenciação, $y'(t) = 2 - A\sin t + B\cos t$. Pela segunda condição inicial tem-se $y'\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2 - A/\sqrt{2} + B/\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$. Tem-se $A = 1$, $B = -1$ e a resposta $y(t) = \cos t - \sin t + 2t$.

Transformada de Laplace do Integral de uma Função.

Uma vez que a diferenciação e a integração são processos inversos, e uma vez que, grosseiramente falando, a diferenciação de uma função corresponde à multiplicação da sua transformada por s, espera-se que a integração de uma função corresponda à divisão da sua transformada por s, porque a divisão é a operação inversa da multiplicação.

Teorema – Se $f(t)$ é contínua por partes e satisfaz uma desigualdade da forma $|f(t)| \le Me^{\gamma t}$, então $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$ ($s > 0$, $s > \gamma$).

Demonstração – Suponha-se que $f(t)$ é contínua por partes e satisfaz $|f(t)| \le Me^{\gamma t}$ para algum γ e M. É óbvio que se a última expressão se verifica para γ negativo, também se verifica para γ positivo, e podemos assumir que γ é positivo. Então o integral $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ é contínuo e usando $|f(t)| \le Me^{\gamma t}$ obtemos $|g(t)| \le \int_0^t |f(\tau)|d\tau \le M \le \int_0^t e^{\gamma\tau}d\tau = \frac{M}{\gamma}\left(e^{\gamma t} - 1\right) \le \frac{M}{\gamma}e^{\gamma t}$ ($\gamma > 0$). Isto mostra que $g(t)$ também satisfaz uma desigualdade da forma $|f(t)| \le Me^{\gamma t}$. Para além disso $g'(t) = f(t)$, excepto nos pontos para os quais $f(t)$ é descontínua. Assim $g'(t)$ é contínua por partes em cada intervalo finito, e, pelo primeiro teorema relativo a transformadas de derivadas e integrais, $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$ ($s > \gamma$). Aqui, $g(0)$ é claramente igual a zero, e portanto $\mathcal{L}(f) = s\mathcal{L}(g)$. Isto implica o que afirmamos acima no teorema: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}$. Esta equação tem uma *companheira* útil, que obteremos escrevendo $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, trocando os dois membros e calculando a transformada inversa em ambos. Assim $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$.

Exemplo – Seja $\mathcal{L}(f)=\dfrac{1}{s\left(s^2+\omega^2\right)}$. Encontre $f(t)$.

Da tabela já nossa conhecida vem $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2+\omega^2}\right)=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t$. Daqui e do último teorema obtemos a resposta $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right\}=\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^t \sin\omega\tau d\tau=\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$. Isto prova a fórmula 19 que veremos no fim deste capítulo.

Exemplo - Seja $\mathcal{L}(f)=\dfrac{1}{s^2\left(s^2+\omega^2\right)}$. Encontre $f(t)$.

Aplicando o último teorema à resposta no exemplo anterior, obtemos a fórmula desejada: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{1}{s^2+\omega^2}\right)\right\}=\dfrac{1}{\omega^2}\displaystyle\int_0^t (1-\cos\omega\tau)d\tau=\dfrac{1}{\omega^2}\left(t-\dfrac{\sin\omega t}{\omega}\right)$. Isto prova a fórmula 20 que veremos no fim do capítulo.

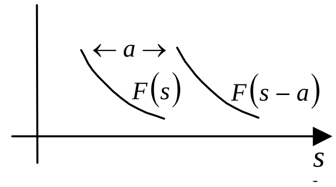
Desvio de s. Desvio de t. Função Escalão Unitário.

Sabemos que a transformada de Laplace é linear, que a diferenciação de $f(t)$ corresponde grosseiramente à multiplicação de $\mathcal{L}(f)$ por s, e que esta propriedade é essencial na resolução de equações diferenciais. Para encontrar aplicações tais que a transformada de Laplace possa mostrar o seu real valor, temos primeiro que deduzir mais algumas propriedades. Duas propriedades muito importantes dizem respeito ao desvio do eixo s e ao desvio do eixo t, como se expressa nos dois teoremas seguintes.

Desvio s: Substituição de s por $s-a$ em $F(s)$.

Teorema – Se $f(t)$ tem a transformada $F(s)$ onde $s>\gamma$, então $e^{at}f(t)$ tem a transformada $F(s-a)$ onde $s-a>\gamma$; assim, se $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, então $\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)$.

Assim, se conhecermos a transformada $F(s)$ de $f(t)$, encontramos a transformada de $e^{at} f(t)$ através do desvio do eixo s - isto é, por substituição de s por $s-a$, para encontrar $F(s-a)$.



Nota – Tomando a transformada inversa am ambos os membros e interagindo com os membros esquerdo e direito obtemos de $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$ a equação $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$.

<u>Demonstração</u> – Por definição, $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ e, portanto,

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at} f(t)\right]dt = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}.$$

<u>Exemplo</u> – Aplicando o teorema anterior às fórmulas $f(t) = t^n \Rightarrow \mathcal{L}(f) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $f(t) = \cos\omega t \Rightarrow \mathcal{L}(f) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ e $f(t) = \sin\omega t \Rightarrow \mathcal{L}(f) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, da tabela anterior, obtemos os seguintes resultados:

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

O que prova as fórmulas 8, 9, 17 e 18 que veremos no fim do capítulo.

<u>Exemplo</u> – Uma bola de ferro com massa $m = 2$ está segura na extremidade inferior de uma mola elástica cuja extremidade superior está fixa, sendo o módulo de

elasticidade $k=10$. Seja $y(t)$ o deslocamento da bola a partir da sua posição de equilíbrio estático. Determine as vibrações da bola, começando na posição inicial $y(0)=2$ com a velocidade inicial $y'(0)=-4$, assumindo que existe amortecimento proporcional à velocidade, sendo a constante de amortecimento $c=4$.

O movimento é descrito pela solução $y(t)$ do problema de valor inicial $y''+2y'+5y=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=-4$. A equação subsidiária é $(s^2+as+b)Y=(s+a)y(0)+y'(0)+R(s)$, isto é, $(s^2+2s+5)Y=(s+2)2-4+0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (s^2+2s+5)Y=(s+2)2-4$. A função de transferência é $Q(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+5}$ e assim temos $Y(s)=[(s+2)2-4]\dfrac{1}{s^2+2s+5}+0\times Q(s) \Leftrightarrow Y(s)=\dfrac{2s}{s^2+2s+5}=$ $2\dfrac{s+1}{(s+1)^2+2^2}-\dfrac{2}{(s+1)^2+2^2}$. Então $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+2^2}\right)=\cos 2t$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{s^2+2^2}\right)=\sin 2t$. Daqui e do teorema anterior obtemos o tipo de solução esperada $y(t)=\mathcal{L}^{-1}(Y)=e^{-t}(2\cos 2t-\sin 2t)$.

<u>Exemplo</u> – Resolva o problema de valor inicial $y''-2y'+y=e^t+t, \quad y(0)=1,$ $y'(0)=0$.

A equação subsidiária é $(s^2Y-s)-2(sY-1)+Y=\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{s^2}$. Ordenando os termos em Y, tem-se $(s^2-2s+1)Y=(s-1)^2Y=s-2+\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{s^2}$. Tem-se assim $Y=\dfrac{s-2}{(s-1)^2}+\dfrac{1}{(s-1)^3}+\dfrac{1}{s^2(s-1)^2}$. Aplicamos agora o primeiro teorema. O primeiro termo é $\dfrac{s-2}{(s-1)^2}=\dfrac{s-1}{(s-1)^2}-\dfrac{1}{(s-1)^2}=\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{(s-1)^2} \Rightarrow$ inversa: e^t-te^t. A inversa do segundo termo é $t^2e^t/2$ pela tabela e pelo último teorema. Em termos de fracções parciais, o último termo é $\dfrac{1}{s^2(s-1)^2}=\dfrac{A}{(s-1)^2}+\dfrac{B}{s-1}+\dfrac{C}{s^2}+\dfrac{D}{s}$. A multiplicação pelo denominador comum origina $I=As^2+Bs^2(s-1)+C(s-1)^2+Ds(s-1)^2$. Para $s=0$

tem-se $C = 1$. Para $s = 1$ tem-se $A = 1$. Equacionando a soma dos termos em s^3 e igualando a zero tem-se $D + B = 0$, $D = -B$. Equacionando a soma dos termos em s e igualando a zero obtém-se $-2C + D = 0$, $D = 2$, e $B = -D = -2$. A soma das fracções parciais é agora $\dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{-2}{s-1} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{2}{s}$ $\Rightarrow$ inversa: $te^t - 2e^t + t + 2$. A inversa resulta da tabela e do teorema anterior. Ordenando os termos, encontramos $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^t - te^t + \frac{1}{2}t^2e^t + (t-2)e^t + t + 2 = -e^t + \dfrac{1}{2}t^2e^t + t + 2$.

Desvio t: Substituição de t por $t - a$ em $f(t)$.

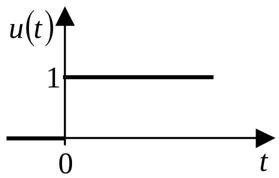
O teorema que vimos anteriormente diz respeito ao desvio do eixo s: a substituição de s em $F(s)$ por $s - a$ corresponde à multiplicação da função original $f(t)$ por e^{at}. Veremos agora o segundo teorema, que diz respeito ao desvio do eixo t: a substituição de t em $f(t)$ por $t - a$ corresponde grosseiramente à multiplicação da transformada $F(s)$ por e^{-as}; sendo a sua formulação a seguinte:

<u>Teorema</u> – Se $f(t)$ tem a transformada $F(s)$, então a função $\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ f(t-a) & \text{se } t > a \end{cases}$ com $a \geq 0$ arbitrário tem a transformada $e^{-as}F(s)$. Assim se conhecermos essa transformada $F(s)$ de $f(t)$, encontramos a transformada da função $\tilde{f}(t)$, cuja variável foi *desviada* – desvio do eixo t - multiplicando $F(s)$ por e^{-as}.

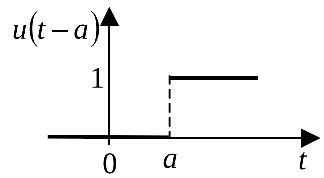
Função Escalão Unitário $u(t - a)$.

Por definição, $u(t-a)$ é igual a zero para $t < a$, tem um acréscimo de tamanho 1 em $t = a$ e é 1 para $t > a$: $u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ 1 & \text{se } t > a \end{cases}$ ($a \geq 0$).

A figura



mostra o caso especial $u(t)$, que tem o acréscimo em zero, e a figura seguinte:

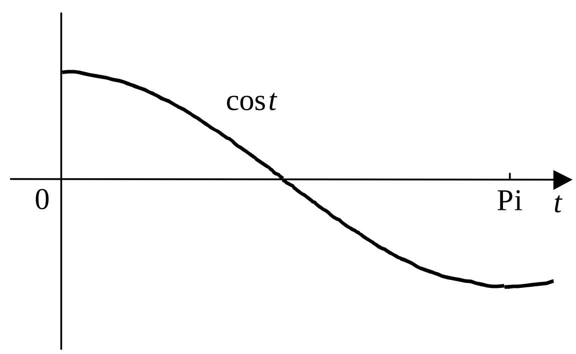


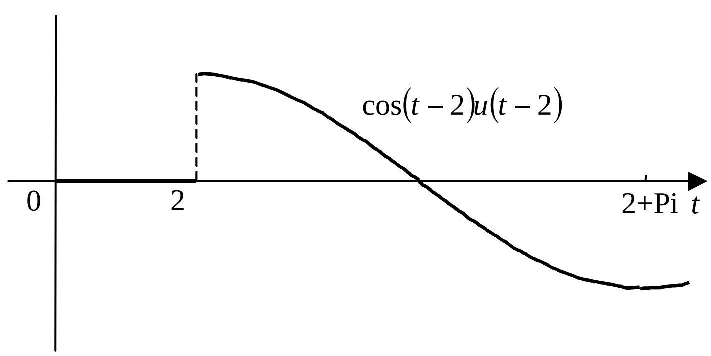
mostra o caso geral $u(t-a)$ para um valor a arbitrário positivo. A função escalão unitário é também chamada a função *Heaviside*.

A função escalão unitário $u(t-a)$ é um bloco de construções básicas de várias funções, como veremos, e aumenta grandemente a utilidade dos métodos das transformadas de Laplace. Podemos usá-la para escrever $\tilde{f}(t)$ na forma $f(t-a)u(t-a)$, isto é, $f(t-a)u(t-a)=\begin{cases}0 & \text{se } t<a\\ f(t-a) & \text{se } t>a\end{cases}$.

Este é o gráfico de $f(t)$ para $t>0$, mas desviado a unidades para a direita.

As duas figuras seguintes mostram um exemplo. Representam respectivamente a curva cosseno $f(t)=\cos t$ para $t>0$ e a curva $f(t-2)u(t-2)=\cos(t-2)u(t-2)$ obtida por desvio de 2 unidades para a direita. Para $t<a=2$ esta função é nula porque $u(t-2)$ tem esta propriedade.





Usando a fórmula $f(t-a)u(t-a)=$

$$=\begin{cases}0 & \text{se } t<a\\ f(t-a) & \text{se } t>a\end{cases}$$

podemos então agora reformular o último teorema:

<u>Teorema</u> – Se $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, então $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$.

Nota – Se tomarmos a antitransformada em ambos os membros da equação anterior e os trocarmos, obtemos a fórmula complementar $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\}= f(t-a)u(t-a)$.

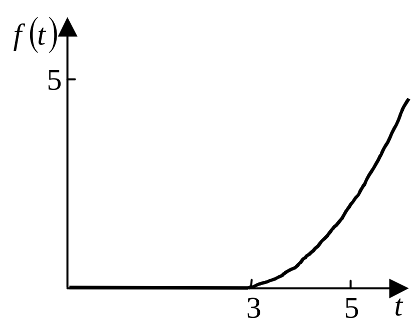
<u>Demonstração</u> – Da definição temos $e^{-as}F(s)=e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau=\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)d\tau$.

Substituindo $\tau+a=t$ no integral, obtemos $e^{-as}F(s)=\int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt$. Podemos escrever isto como um integral de 0 a ∞ se nos certificarmos que o integrando é nulo para todo o t de zero a a. Podemos consegui-lo facilmente multiplicando o presente integrando pela função escalão $u(t-a)$, obtendo assim $\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\}=e^{-as}F(s)$ e complementando a demonstração: $e^{-as}F(s)=\int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)dt=$ $=\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\}$. A transformada da função escalão unitário $u(t-a)$ é $\mathcal{L}\left\{u(t-a)\right\}=\dfrac{e^{-as}}{s}$ ($s>0$). Esta fórmula segue-se directamente da definição porque $\mathcal{L}\left\{u(t-a)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}u(t-a)dt=\int_0^a e^{-st}0dt+\int_a^\infty e^{-st}1dt=-\dfrac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^\infty$. Vamos considerar dois exemplos simples de aplicação do que vimos.

<u>Exemplo</u> – Encontre a transformada inversa de e^{-3s}/s^3.

Uma vez que $\mathcal{L}^{-1}\left(1/s^3\right)=t^2/2$, o teorema anterior dá-nos $\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-3s}/s^3\right)=$

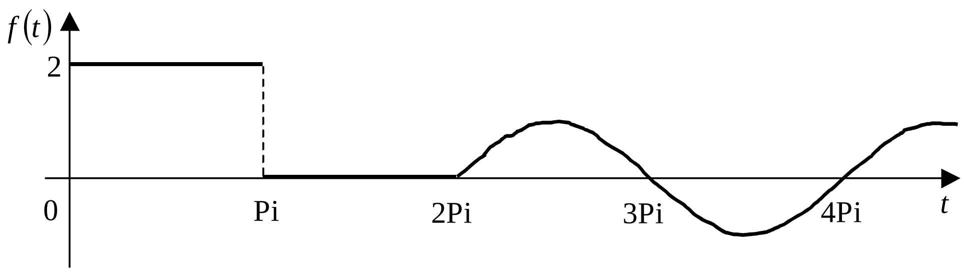
$$=\frac{1}{2}(t-3)^2u(t-3)=\begin{cases}0 & \text{se } t<3\\ \dfrac{1}{2}(t-3)^2 & \text{se } t>3\end{cases}\Rightarrow$$



<u>Exemplo</u> – Encontre a transformada da função $f(t)=\begin{cases}2 & \text{se } 0<t<\pi\\ 0 & \text{se } \pi<t<2\pi\\ \sin t & \text{se } t>2\pi\end{cases}$.

Primeiro passo – Escrevemos $f(t)$ em termos de funções escalão. Para $0<t<\pi$, tomemos $2u(t)$. Para $t>\pi$ queremos zero, portanto temos que subtrair a função escalão $2u(t-\pi)$ com *salto* em π. Temos então $2u(t)-2u(t-\pi)=0$ quando $t>\pi$. Isto está bem até atingirmos 2π onde queremos que entre a função $\sin t$; portanto adicionamos $u(t-2\pi)\sin t$. Tudo junto, $f(t)=2u(t)-2u(t-\pi)+u(t-2\pi)\sin t$.

Segundo passo – O último membro é igual a $u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)$ devido à peridiocidade, de modo que $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{u(t-a)\}=\frac{e^{-as}}{s}$ e a tabela nos permitem obter $\mathcal{L}(f)=\frac{2}{s}-\frac{2e^{-\pi s}}{s}+\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$ $\Rightarrow$



Transformada de Laplace. Fórmulas Gerais.

Fórmula	Nome, Comentários
$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Definição de Transformada Transformada Inversa
$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}$	Linearidade
$\mathcal{L}(f')=s\mathcal{L}(f)-f(0)$ $\mathcal{L}(f'')=s^2\mathcal{L}(f)-sf(0)-f'(0)$ $\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)=s^n\mathcal{L}(f)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$ $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}\mathcal{L}(f)$	Diferenciação de Função Integração de Função
$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$	Desvio s (1º Teorema do Desvio)
$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)u(t-a)$	Desvio t (2º Teorema do Desvio)

Tabela das Transformadas de Laplace.

	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
1	$1/s$	1
2	$1/s^2$	t
3	$1/s^n$, ($n=1,2,\ldots$)	$t^{n-1}/(n-1)!$
4	$1/\sqrt{s}$	$1/\sqrt{\pi t}$
5	$1/s^{3/2}$	$2/\sqrt{t/\pi}$
6	$1/s^a$ ($a>0$)	$t^{a-1}/\Gamma(a)$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}$, $n=1,2,\ldots$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}$ ($n>0$)	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ $a\neq b$	$\frac{1}{(a-b)}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$ $a\neq b$	$\frac{1}{(a-b)}\left(ae^{at}-be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega t$
14	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\sinh at$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega} e^{at} \sin \omega t$
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$
19	$\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos \omega t)$
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin \omega t)$
21	$\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t-\omega t \cos \omega t)$
22	$e^{-as/s}$	$u(t-a)$