Capítulo V

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Maria Alzira Pimenta Dinis
Digitally signed by Maria Alzira Pimenta Dinis
DN: cn=Maria Alzira Pimenta Dinis, o=Universidade Fernando Pessoa, ou=CIAGEB, email=madinis@ufp.pt, c=PT
Reason: I am the author of this document
Date: 2008.01.23 11:41:22 Z

Capítulo V

As equações diferenciais parciais aparecem em ligação com diversos problemas físicos e geométricos quando as funções envolvidas dependem de duas ou mais variáveis independentes. Deve dizer-se que uma parte significativa de problemas físicos, de mecânica de fluidos e de sólidos – dinâmica, elasticidade, transferência de calor, teoria electromagnética, mecânica quântica, e outras áreas da física são modeladas por equações diferenciais parciais. As variáveis independentes envolvidas podem ser o tempo e uma ou várias coordenadas no espaço.

Conceitos Básicos.

Uma equação envolvendo uma ou mais derivadas parciais de uma função – desconhecida – de duas ou mais variáveis independentes é chamada uma *equação diferencial parcial*. A ordem da derivada mais alta é chamada a *ordem* da equação. Tal como no caso de uma equação diferencial ordinária, diz-se que uma equação diferencial parcial é *linear* se é do primeiro grau na variável dependente – a função desconhecida e suas derivadas parciais. Se cada termo de tal equação contém ou a variável dependente ou uma das suas derivadas, a equação diz-se ser *homogénea*; de outro modo diz-se ser *não homogénea*.

<u>Exemplo</u> – São exemplos de equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem, as seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ Equação de Onda Uni-dimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ Equação de Calor Uni-dimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ Equação de Laplace Bi-dimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ Equação de Poisson Bi-dimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad \text{Equação de Laplace Tri-dimensional}$$

Aqui c é uma constante, t é o tempo, e x, y, z são coordenadas cartesianas. A quarta equação (com $f(x,y)\neq 0$) é não-homogénea, enquanto as outras equações são homogéneas. Uma *solução* de uma equação diferencial parcial numa região R do espaço de variáveis independentes é uma função que tem todas as derivadas parciais a aparecerem na equação em qualquer lado em R. (Frequentemente exige-se apenas que a função seja contínua na fronteira de R, tenha tais derivadas no interior de R.) Em geral, a totalidade de soluções de uma equação diferencial parcial é muito grande. Por exemplo, as funções $u=x^2-y^2$, $u=e^x\cos x$, $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$, que são inteiramente diferentes umas das outras, são soluções de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. A única solução de uma equação diferencial parcial correspondendo a um determinado problema físico será obtida através da utilização de condições adicionais que resultam do problema, por exemplo, a condição de que u assume valores dados na fronteira da região considerada – *condições fronteira*, ou, quando o tempo t é uma das variáveis, que u - ou $u_t=\partial u/\partial t$ ou ambos – é prescrito em $t=0$ - *condições iniciais*. Sabemos que se uma função diferencial ordinária é linear e homogénea, então a partir de soluções conhecidas, podemos obter mais soluções por superposição. Para uma equação diferencial parcial linear homogénea a situação é bastante semelhante, verificando-se o seguinte teorema:

<u>Teorema</u> – Se u_1 e u_2 constituem quaisquer soluções de uma equação diferencial parcial homogénea linear numa região R, então $u=c_1u_1+c_2u_2$ onde c_1 e c_2 são quaisquer constantes, é também uma solução dessa equação em R.

A demonstração deste importante teorema é simples e bastante similar à do teorema que vimos para equações diferenciais ordinárias, mas não a efectuaremos.

<u>Exemplo</u> – Encontre uma solução $u(x,y)$ da equação diferencial parcial $u_{xx}-u=0$.

Uma vez que não existem derivadas em y, podemos resolver isto como $u'' - u = 0$. Tratando-se de equações diferenciais ordinárias teríamos obtido $u = Ae^{x} + Be^{-x}$ com A e B como constantes. Aqui A e B podem ser funções de y, portanto a resposta é $u(x, y) = A(y)e^{x} + B(y)e^{-x}$ com A e B funções arbitrárias, sendo possível uma variedade grande de soluções.

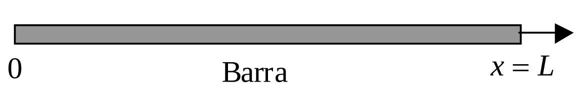
<u>Exemplo</u> – Resolva a equação diferencial parcial $u_{xy} = -u_{x}$.

Sendo $u_{x} = p$, tem-se $p_{y} = -p$, $p_{y}/p = -1$, $\ln p = -y + \tilde{c}(x)$, $p = c(x)e^{-y}$ e integrando relativamente a x vem, $u(x, y) = f(x)e^{-y} + g(y)$ onde $f(x) = \int c(x)dx$; aqui $f(x)$ e $g(y)$ são arbitrários.

Equação de Calor.

A *equação de calor* $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^{2}\nabla^{2}u$ com $c^{2} = \dfrac{k}{\sigma\rho}$ dá-nos a temperatura $u(x, y, z, t)$ num corpo de material homogéneo. Aqui c^{2} é a difusividade térmica, k a condutividade térmica, σ o calor específico, e ρ a densidade do material do corpo. $\nabla^{2}u$ é o Laplaciano de u, referido às coordenadas cartesianas x, y, z, $\nabla^{2}u = \dfrac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} + \dfrac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}} + \dfrac{\partial^{2}u}{\partial z^{2}}$. Como aplicação importante consideremos a temperatura numa barra ou arame finos de secção constante e material homogéneo, que está orientado ao longo do eixo x e está perfeitamente isolado lateralmente, por forma a que o calor flui apenas na direcção do eixo dos x. Então u depende somente de x e do tempo t, e a equação de calor torna-se a *equação de calor uni-dimensional*: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^{2}\dfrac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}$. Resolveremos esta equação para alguns tipos de fronteira e condições iniciais importantes.

Começemos com o caso no qual os extremos $x = 0$ e $x = L$ da barra à



direita são mantidos à temperatura zero, de forma que as *condições fronteira* $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$ para todo o t, e a temperatura inicial na barra é $f(x)$, por forma a obtermos a *condição inicial* $u(x,0)=f(x)$, dado $f(x)$. Determinaremos uma solução $u(x,t)$ de $\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ satisfazendo $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$ e $u(x,0)=f(x)$ - uma condição inicial seria suficiente. Vejamos como se processa o método:

- *Primeiro passo – Duas Equações Diferenciais Ordinárias*: A substituição $u(x,t)=F(x)G(t)$ em $\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ permite obter $F\dot{G}=c^2F''G$ com $\dot{G}=dG/dt$ e $F''=d^2F/dx^2$. Para separar as variáveis divide-se por c^2FG, obtendo $\frac{\dot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}$. O lado esquerdo depende somente de t e o lado direito somente de x, de modo que ambos os membros devem ser iguais a uma constante k. Para $k\geq 0$ a única solução $u=FG$ que satisfaz $u(0,t)=0$ e $u(L,t)=0$, é $u\equiv 0$. Para k negativo igual a $-p^2$ ($k=-p^2$) tem-se $\frac{\dot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}=-p^2$. Obtêm-se assim as duas equações diferenciais ordinárias lineares $F''+p^2F=0$ e $\dot{G}+c^2p^2G=0$.
- *Segundo passo – Satisfação das Condições Fronteira*: Resolvemos primeiro $F''+p^2F=0$. Uma solução geral é $F(x)=A\cos px+B\sin px$. Das condições fronteira $u(0,t)=0$ e $u(L,t)=0$, segue-se que $u(0,t)=F(0)G(t)=0$ e $u(L,t)=F(L)G(t)=0$. Uma vez que $G\equiv 0$ permitiria obter $u\equiv 0$, temos que ter $F(0)=0$, $F(L)=0$ e assim $F(0)=A=0$ através de $F(x)=A\cos px+B\sin px$ e então $F(L)=B\sin pL=0$, com $B\neq 0$ (para evitar $F\equiv 0$); assim, $\sin pL=0$, então $p=\frac{n\pi}{L}$, $n=1,2,\ldots$. Definindo $B=1$, obtemos as seguintes soluções de $F''+p^2F=0$ satisfazendo $u(0,t)=0$ e $u(L,t)=0$: $F_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L}$, $n=1,2,\ldots$.

Resolvemos agora a equação diferencial $\dot{G}+c^2p^2G=0$, que para $p=n\pi/L$, como obtido, é $\dot{G}+\lambda_n{}^2G=0$ onde $\lambda_n=\dfrac{cn\pi}{L}$. Tem a solução geral $G_n(t)=B_ne^{-\lambda_n{}^2t}$, $n=1,2,\ldots$, onde B_n é uma constante . Assim as funções $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=B_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t}$ ($n=1,2,\ldots$) são soluções da equação de calor $\dfrac{\partial u}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$, satisfazendo $u(0,t)=0$ e $u(L,t)=0$. Estas são as *eigenfunções* do problema, correspondendo aos *eigenvalores* $\lambda_n=cn\pi/L$.

- *Terceiro passo – Solução de Todo o Problema*: Até agora temos soluções $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=B_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t}$ de $\dfrac{\partial u}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$ satisfazendo as condições fronteira $u(0,t)=0$ e $u(L,t)=0$. Para obter uma solução que também satisfaça a condição inicial $u(x,o)=f(x)$, consideramos um série destas eigenfunções, $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t}$ ($\lambda_n=\dfrac{cn\pi}{L}$). Daqui e de $u(x,o)=f(x)$ tem-se $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}=f(x)$. Assim, para que $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=$ $=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t}$ satisfaça $u(x,o)=f(x)$, os termos em B_n devem ser os coeficientes da série de senos de Fourier; assim $B_n=\dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}dx$ com $n=1,2,\ldots$. A solução do nosso problema pode ser estabelecida, assumindo que $f(x)$ é contínua por partes no intervalo $0\le x\le L$ e tem derivadas laterais em todos os pontos interiores do intervalo; isto é, sob estas *hipóteses* a série $u(x,t)=$ $=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t}$ com coeficientes $B_n=\dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}dx$ é a solução do nosso problema físico. Devido ao factor exponencial todos os termos em $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\dfrac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t}$ se aproximam de zero à medida que t se aproxima do infinito. A taxa de decrescimento varia com n.

Exemplo – Encontre a temperatura $u(x,t)$ numa barra de cobre isolada lateralmente com 80 cm de comprimento se a temperatura inicial for $100\sin(\pi x/80)$°C e as extremidades se encontrarem a 0°C. quanto tempo demorará para que a temperatura na barra diminua para 50°C? Deduza primeiro, depois calcule. Dados físicos para o cobre: densidade 8,92 gm/cm^3, calor específico 0,092 cal/gm °C, condutividade térmica 0,95 cal/cm s °C.

Da condição inicial vem $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{80} = f(x) = 100\sin\frac{\pi x}{80}$. Assim, por simples comprovação ou de $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n{}^2 t}$ tem-se $B_1=100$, $B_2=B_3=\cdots=0$. Em $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n{}^2 t}$ precisamos de $\lambda_1{}^2=c^2\pi^2/L^2$, onde $c^2=k/\sigma\rho=0{,}95/0{,}092\cdot 8{,}92=1{,}158$ [cm^2/s]. Então obtemos $\lambda_1{}^2=1{,}158\cdot 9{,}870/6400=0{,}001785$ [s^{-1}]. A solução é $u(x,t)=100\sin\frac{\pi x}{80} e^{-0{,}001785t}$. Para além disso, $100e^{-0{,}001785t}=50$ quando $t=(\ln 0{,}5)/(-0{,}001785)=388$ [segundos] $\approx$ [minutos].

Exemplo – Resolva o problema no exemplo anterior quando a temperatura inicial é $100\sin(3\pi x/80)$°C, sendo os outros dados iguais aos anteriores.

Em $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n{}^2 t}$, em vez de $n=1$ temos agora $n=3$, e $\lambda_3{}^2=3^2\lambda_1{}^2=9\cdot 0{,}001785=0{,}01607$, portanto a solução é agora $u(x,t)=$ $=100\sin\frac{3\pi x}{80} e^{-0{,}01607t}$. Sendo assim, a temperatura máxima desce para 50°C em $t=(\ln 0{,}5)/(-0{,}01607)\approx 43$ [s], o que é muito mais rápido – nove vezes mais do que no exemplo anterior. Se tivéssemos escolhido um n superior, o decréscimo ainda teria sido mais rápido, e numa soma ou série de tais termos, cada termo tem a sua própria taxa da crescimento, e os termos de maior n são praticamente nulo após um curto período de tempo. O próximo exemplo é desse tipo, e a curva da respectiva figura correspondendo a $t = 0{,}5$ assemelha-se a uma curva de senos; isto é, é praticamente o gráfico do primeiro termo da solução.

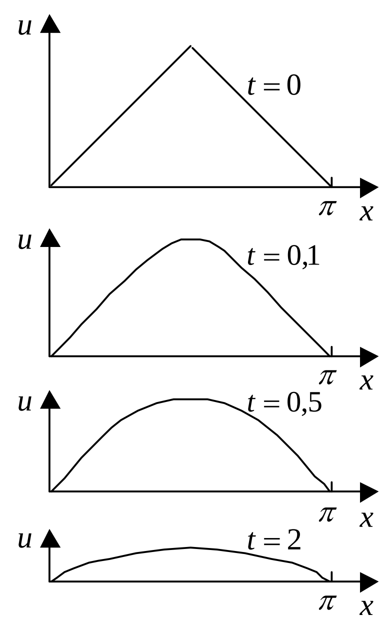
<u>Exemplo</u> – Encontre a temperatura numa barra lateralmente isolada de comprimento L cujas extremidades são mantidas a temperatura zero, assumindo que a temperatura inicial é: $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < L/2 \\ L - x & \text{se } L/2 < x < L \end{cases}$.

De $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$ obtém-se a equação $B_n = \frac{2}{L}\left(\int_0^{L/2} x\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)$. Da integração vem $B_n = 0$ se n é par e $B_n = \frac{4L}{n^2\pi^2}$, ($n = 1,5,9,\ldots$), $B_n = -\frac{4L}{n^2\pi^2}$ ($n = 3,7,11,\ldots$). Assim a solução é

$$u(x,t) = \frac{4L}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{L}\exp\left[-\left(\frac{c\pi}{L}\right)^2 t\right] - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{L}\exp\left[-\left(\frac{3c\pi}{L}\right)^2 t\right] + - \cdots\right].$$

A figura que se segue mostra que a temperatura dimunui com t crescente, devido à perda de calor por arrefecimento das extremidades:

Solução para $L = \pi$, $c = 1$ e vários valores de t.



Exemplo- Encontre uma fórmula solução de $\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0)=f(x)$ com $u(0,t)=0$ e $u(L,t)=0$ substituidos pela condição de ambas as extremidades da barra se encontrarem isoladas.

As experiências físicas mostram que a taxa de fluimento do calor é proporcional ao radiente de temperatura. Então, se as extremidades $x=0$ e $x=L$ da barra estão isoladas, de forma que nenhum calor sai através das extremidades, tem-se as condições fronteira $u_x(0,t)=0$, $u_x(L,t)=0$ para todo o t. Uma vez que $u(x,t)=F(x)G(t)$, obtém-se $u_x(0,t)=F'(0)G(t)=0$, $u_x(L,t)=F'(L)G(t)=0$. Diferenciando $F(x)=A\cos px+B\sin px$, tem-se $F'(x)=-Ap\sin px+Bp\cos px$, de forma que $F'(0)=B_p=0$ e então $F'(L)=-Ap\sin pL=0$. A segunda destas condições dá $p=p_n=\frac{n\pi}{L}$, $n=0,1,2,\ldots$. Daqui e de $F(x)=A\cos px+B\sin px$ com $A=1$ e B=0 obtemos $F_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{L}$, $n=0,1,2,\ldots$. Com G_n como anteriormente, isto produz as eigenfunções $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t}$ ($n=0,1,\ldots$) correspondendo aos eigenvalores $\lambda_n=cn\pi/L$. O último está como anteriormente, mas tem-se agora o eigenvalor $\lambda_0=0$ e a eigenfunção $u_n=$constante adicionais, que é a solução do problema se a temperatura inicial $f(x)$ for constante. Isto demonstra o facto notável de que uma constante de separação pode ser nula, e zero pode ser um eigenvalor. Para além disso, enquanto que $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=B_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t}$ originou uma série de senos de Fourier, obtemos agora de $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t}$ uma série de cossenos de Fourier $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t}$ ($\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}$) com coeficientes que resultam da condição inicial $u(x,0)=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{L}$ no forma $A_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$, $A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$, $n=1,2,\ldots$.

Exemplo – Encontre a temperatura na barra do penúltimo exemplo, assumindo que as extremidades estão isoladas (em vez de mantidas à temperatura zero).

Para a temperatura inicial *triangular*, as fórmulas $A_o = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$, $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$ permitem obter $A_o = L/4$ e $A_n = \frac{2}{L}\left(\int_0^{L/2} x\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \right.$ $\left. + \int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right) = \frac{2L}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)$. Assim a solução $u(x,t) =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2 t}$ é $u(x,t) = \frac{L}{4} - \frac{8L}{\pi^2}\left\{\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{L}\exp\left[-\left(\frac{2c\pi}{L}\right)^2 t\right] + \right.$ $\left. + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{L}\exp\left[-\left(\frac{6c\pi}{L}\right)^2 t\right] + \cdots\right\}$.

Vemos que os termos diminuem à medida que t aumenta, e $u \to L/4$, o valor médio da temperatura inicial, o que é plausível porque nenhum calor pode escapar desta barra completamente isolada. Em constraste, o arrefecimento das extremidades no terceiro exemplo conduziu à perda de calor e $u \to 0$, a temperatura à qual as extremidades são mantidas.

Equação de Laplace.

Uma das mais importantes equações diferenciais parciais na física é a *equação de Laplace*: $\nabla^2 u = 0$. Aqui $\nabla^2 u$ é o Laplaciano de u. Em coordenadas cartesianas x, y, z no espaço temos que $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. A teoria das soluções da equação de Laplace é chamada de *teoria potencial*. As soluções de $\nabla^2 u$ que têm segundas derivadas parciais contínuas são chamadas *funções harmónicas*.

Veremos de seguida algo sobre a importância da equação de Laplace, mencionando as áreas principais onde desempenha um papel importante.

Áreas de Aplicação.

Gravidade – É governada pela equação de Laplace. Se uma partícula A de massa M está fixa num ponto (X, Y, Z) e outra partícula B de massa m está num ponto (x, y, z), então A atrai B, sendo a força gravitacional o gradiente da função escalar $u(x, y, z) = \frac{c}{r}$, $c = GMm = \text{constante}$, $r = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}$ (>0). Esta função de x, y, z é camada o *potencial* do campo gravitacional, e satisfaz a equação de Laplace. A extensão do potencial e força devido a uma distribuição contínua de massa é bastante directa. Se uma massa de densidade $\rho(X, Y, Z)$ está distribuida através de uma região T no espaço, então o potencial u correspondente num ponto (x, y, z) não ocupado por massa é definido como sendo $u(x, y, z) = k\iiint \frac{\rho(X, Y, Z)}{r} dXdYdZ$ ($k > 0$) com r como dado pela fórmula anterior. Uma vez que $1/r$ ($r > 0$) é uma solução de $\nabla^2 u = 0$, isto é, $\nabla^2(1/r) = 0$ e ρ não depende de x, y, z, obtemos $\nabla^2 u = k\iiint \rho \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dXdYdZ = 0$, isto é, o potencial gravitacional definido por $u(x, y, z) = k\iiint \frac{\rho(X, Y, Z)}{r} dXdYdZ$ satisfaz a equação de Laplace em qualquer ponto que não está ocupado por matéria.

Electroestática – A força eléctrica de atracção ou repulsão entre partículas carregadas é dominada pela lei de Coulomb, que é da mesma forma matemática que a lei gravitacional de Newton. Segue-se daqui que o campo criado por uma distribuição de cargas eléctricas pode ser descrito matematicamente por uma função potencial que satisfaz a equação de Laplace em qualquer ponto não ocupado por cargas.

Transferência de Calor – É governada pela equação de calor $u_t = c^2 \nabla^2 u$, que no caso estável ($u_t = 0$) reduz a equação de Laplace, para problemas bi-dimensionais, e no caso de tri-domensionais, isto é similar.

Hidrodinâmica – A equação de Laplace aparece também em ligação com a transferência de fluido incompressível de forma estável.

Laplaciano em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas.

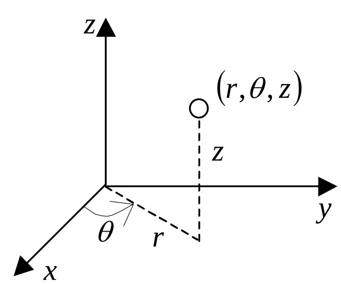
Na maior parte das aplicações que conduzem à equação de Laplace, é necessário resolver um problema de valor fronteira, isto é, determinar a solução de $\nabla^2 u = 0$ satisfazendo condições fronteira dadas na superfície S da região T na qual a equação é considerada. Chama-se a isto:

(I) *Primeiro Problema de Valor Fronteira* ou *Problema de Dirichlet* se u é prescrito em S.

(II) *SegundoProblema de Valor Fronteira* ou *Problema de Neumann* se a derivada normal $u_n = \partial u / \partial n$ é prescrita em S.

(III) *Terceiro* ou *Misto, Problema de Valor Fronteira* se u é prescrito numa porção de S e u_n na restante parte de S.

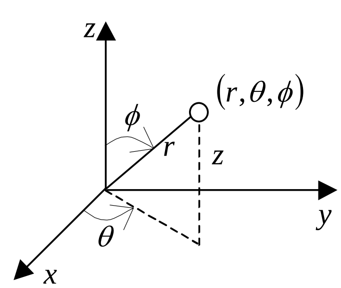
É então necessário introduzir coordenadas no espaço tais que S seja dado por fórmulas simples. Para isto, devemos transformar o Laplaciano noutras coordenadas. Na verdade, para *coordenadas cilíndricas* r, θ, z, que estão relacionadas com coordenadas cartesianas através de $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, obtemos imediatamente $\nabla^2 u$ ao adicionar u_{zz} a $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, tendo assim



$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

São igualmente importantes na prática as *coordenadas esféricas* r, θ, ϕ, que estão relacionadas com as coordenadas cartesianas por $x = r\cos\theta\sin\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\phi$. O Laplaciano de uma função u em coordenadas esféricas é $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} +$

$+ \frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$, que pode também ser escrito como $\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\phi} \times\right.$



$$\times \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi \frac{\partial u}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\Bigg]$$. Não veremos a sua dedução.