Digitally signed by Maria Alzira Pimenta Dinis
DN: cn=Maria Alzira Pimenta Dinis, o=Universidade Fernando Pessoa, ou=CIAGEB, email=madinis@ufp.pt, c=PT
Reason: I am the author of this document
Date: 2008.01.23 11:39:51 Z

ANÁLISE MATEMÁTICA III

Universidade Fernando Pessoa

Faculdade de Ciência e Tecnologia

Capítulo I - Equações Diferenciais Ordinárias

EXERCÍCIOS

1. Diga qual a ordem das seguintes equações diferenciais e verifique que a função dada é uma solução:

a) $xy'' = 2y'$ (R: 1ª ordem)

b) $y'' + 9y' = 0$ (R: 2ª ordem)

c) $y' - 0{,}5y = 1, \quad y = ce^{0{,}5x} - 2$ (R: 1ª ordem)

d) $y''' = 6, \quad y = x^3 + ax^2 + bx + c$ (R: 3ª ordem)

e) $y' + y\tan x = 0, \quad y = c\cos x$ (R: 1ª ordem)

f) $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y = e^x(A\cos x + B\sin x)$ (R: 2ª ordem)

2. Verifique que a função dada é uma solução da correspondente equação diferencial e determine c por forma a que a solução particular resultante satisfaça a condição inicial:

a) $y' + y = 1, \quad y = ce^{-x} + 1, \quad y = 2{,}5$ quando $x = 0$ (R: c=1,5)

b) $y' = 2xy, \quad y = ce^{x^2}, \quad y = 4$ quando x=1 (R: $c = 4/e$)

c) $xy' = 2y, \quad y = cx^2, \quad y = 12$ quando x=2 (R: c=3)

d) $yy' = x, \quad y^2 - x^2 = c, \quad y(0) = 1$ (R: c=1)

e) $y' = y\cot x, \quad y = c\sin x, \quad y(-\frac{\pi}{2}) = 2$ (R: c=-2)

f) $yy' + x = 0, \quad x^2 + y^2 = c, \quad y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ (R: c=4)

variáveis separáveis

3. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y' = \dfrac{x}{y}, \quad y(1) = 3$ (R: $y^2 - x^2 = 8$)

b) $y' = -2xy, \quad y(0) = 1$ (R: $y = e^{-x^2}$)

c) $\dfrac{dy}{dx} = -4xy^2, \quad y(0) = 1$ (R: $y = \dfrac{1}{2x^2 + 1}$)

4. Resolva $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$ (R: $\tan y = -\cot x + c$)

5. Resolva as equações diferenciais:

a) $y' = 3(y+1)$ (R: $y = ce^{3x} - 1$)

b) $y' = 2xe^{-y}$ (R: $y = \ln\left(x^2 + c\right)$)

c) $y' = y^2 - 4, \quad y(0) = -2$ (R: $y = 2\dfrac{1 + ce^{4x}}{1 - ce^{4x}}$)

redução à forma separável

6. Resolva:

a) $(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0$ (R: $4x + 8y + \ln|4x - 8y + 11| = c$)

b) $xy' = 2x + 2y$ (R: $y = x^2C - 2x$)

c) $xyy' = \dfrac{1}{2}(y^2 + x^2)$ (R: $y^2 = x^2 - cx$)

equações diferenciais exactas

7. Resolva o seguinte problema de valor inicial: $(\sin x \cosh y)dx - (\cos x \sinh y)dy = 0, \quad y(0) = 0$ (R: $\cos x \cosh y = 1$)

8. Mostre que as seguintes equaçıes diferenciais são exactas e resolva-as:

a) $ydx + xdy = 0$ (R: $xy = c$)

b) $y^3 dx + 3xy^2 dy = 0$ (R: $xy^3 = c$)

9. Verifique que a função F dada é um factor integrante e resolva o problema de valor inicial:

a) $2ydx + xdy = 0, \quad y(0{,}5) = 8, \quad F = x$ (R: $x^2 y = 2$)

b) $(1 + xy)dx + x^2 dy = 0, \quad y(1) = 0, \quad F = e^{xy}$ (R: $xe^{xy} = 1$)

10. Encontre um factor integrante e resolva a equação $2\cos \pi y \, dx = \pi \sin \pi y \, dy$ (R: $\cos \pi y \, e^{2x} = c$)

<u>equações diferenciais lineares</u>

11. Resolva $y' + 2y = e^x (3\sin 2x + 2\cos 2x)$ (R: $y = ce^{-2x} + e^x \sin 2x$)

12. Resolva o problema de valor inicial $y' + y\tan x = \sin 2x, \quad y(0) = 1$ (R: $y = 3\cos x - 2\cos^2 x$)

<u>equação de Bernoulli</u>

13. Reduza à forma linear a equação diferencial não linear: $y' + y = y^2$ (R: $y = \dfrac{1}{1 + ce^x}$)

<u>método de Picard</u>

14. Aplique o método de Picard aos seguintes problemas de valor inicial.(Determine também a solução exacta para a alínea a. Compare.):

a) $y' = 2y, \quad y(0) = 1$

(R: $y_n = 1 + 2\int_0^x y_{n-1}(t)\,dt, y_0 = 1, y_1 = 1 + 2x, y_2 = 1 + 2x + (2x)^2 / 2!, etc, y = e^{2x}$)

b) $y' = xy + 2x - x^3, \quad y(0) = 0$

(R: $y_0 = 0, y_1 = x^2 - \frac{1}{4}x^4, y_2 = x^2 - \frac{1}{4 \cdot 6}x^6$, etc)

c) $y' = x + y, \quad y(0) = -1$

(R: $y_0 = -1, \quad y_n = -1 - x + x^{n+1} / (n+1)!, \quad y = -1 - x$)

15. Aplique o método de Picard a $y' = 2xy, \quad y(0) = 1.$ Calcule os valores $y_1(1)$, $y_2(1)$ e $y_3(1)$ e compare-os com o valor exacto $y(1)= e$ =2,718 (R: $y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 2{,}5, \quad y_3(1) = 2{,}667$)

ANÁLISE MATEMÁTICA III

Universidade Fernando Pessoa

Faculdade de Ciência e Tecnologia

Capítulo II - Equações Diferenciais Lineares de 2ª Ordem

EXERCÍCIOS

1. Encontre uma base e uma solução geral para a equação $y'' + y = 0$, verificando que $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \sin x$. (R: $W(1, \quad x^2, \quad x^4) = 16x^3$)

2. Reduza à primeira ordem e resolva

   a) $xy'' = 2y'$ (R: $y = c_1 x^3 + c_2$)

   b) $y'' + 9y' = 0$ (R: $c_1 e^{-9x} + c_2$)

3. Verifique que as funções dadas formam uma base de soluções da equação dada e resolva o problema de valor inicial dado:

   a) $y'' - 9y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0; e^{3x}, e^{-3x}$ (R: $y = 2\cosh 3x$)

   b) $y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 3; e^{x}, xe^{x}$ (R: $y = e^{x}(4 - x)$)

   c) $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = -1, y'(0) = -5; e^{x}, e^{3x}$ (R: $y = e^{x} - 2e^{3x}$)

4. Indague se as funções seguintes são linearmente dependentes ou independentes no intervalo dado:

   a) $x + 1, \quad x - 1, \quad (0 < x < 1)$(R: L.I.)

   b) $\sin 2x, \quad \sin x \cos x,$ qualquer intervalo (R: L.D.)

   c) $|x| \cdot x, \quad x^2 \quad (0 < x < 1)$ (R: L.D.)

<u>equações homogéneas c/ coeficientes constantes</u>

5. Resolva os problemas de valor inicial:

   a) $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -5$ (R: $y = e^{x} + 3e^{-2x}$)

b) $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$ (R: $y = (3 - 5x)e^{2x}$)

6. Encontre uma solução geral das seguintes equações diferenciais:

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$ (R: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$)

b) $y'' + 10y' + 25y = 0$ (R: $y = (c_1 + c_2 x)e^{-5x}$)

c) $y'' - 6y' + 9y = 0$ (R: $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$)

7. Encontre a equação diferencial para a qual as funções dadas formam uma base de soluções:

a) $e^{2x}, \quad e^{-3x}$ (R: $y'' + y' - 6y = 0$)

b) $e^{-2x}, \quad e^{-x/2}$ (R: $y'' + 2{,}5y' + y = 0$)

8. Verifique directamente que no caso de uma raiz dupla, $xe^{\lambda x}$ com $\lambda = -a/2$ é uma solução de $y'' + ay' + by = 0$

9. Mostre que a e b em $y'' + ay' + by = 0$ podem ser expressos em termos de λ_1 e λ_2 pelas fórmulas $a = -\lambda_1 - \lambda_2, \quad b = \lambda_1 \lambda_2$

10. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y'' - 16y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 20$ (R: $y = 3e^{4x} - 2e^{-4x}$)

b) $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 14$ (R: $y = (2x - 4)e^{-3x}$)

<u>raízes complexas</u>

11. Verifique que as seguintes funções são soluções da equação diferencial dada e obtenha a partir delas uma solução geral com valores reais da forma $y = e^{-ax/2}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$:

a) $y = c_1 e^{3ix} + c_2 e^{-3ix}, \quad y'' + 9y = 0$ (R: $y = A\cos 3x + B\sin 3x$)

b) $y = c_1 e^{-(\alpha+i)x} + c_2 e^{-(\alpha-i)x}, y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + 1)y = 0$

(R: $y = e^{-\alpha x}(A\cos x + B\sin x)$)

c) $y = c_1 e^{-(\alpha-i\omega)x} + c_2 e^{-(\alpha+i\omega)x}, \quad y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + \omega^2)y = 0$

(R: $y = e^{-\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$)

12. Diga se a equação dada corresponde ao caso I, II ou III e encontre uma solução

geral com funçıes reais:

a) $y'' - 25y = 0$ (R: caso I, $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-5x}$)

b) $y'' + 6y' + 9y = 0$ (R: caso II, $y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$)

c) $y'' + 2y' = 0$ (R: caso I, $y = c_1 + c_2 e^{-2x}$)

d) $10y'' + 6y' + 10{,}9y = 0$ (R: caso III, $y = e^{-0,3x}(A\cos x + B\sin x)$)

e) $y'' + 2y' + (\omega^2 + 1)y = 0$ (R: caso III, $y = e^{-x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$)

13. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y'' + 9y = 0, \quad y(\pi) = -2, \quad y'(\pi) = 3$ (R: $y = 2\cos 3x - \sin 3x$)

b) $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 10$ (R: $y = (3 + 4x)e^{2x}$)

c) $y'' + 20y' + 100y = 0, \quad y(0{,}1) = 3{,}2/e \approx 1{,}177, \quad y'(0{,}1) = -30/e \approx -11{,}04$

(R: $y = (3 + 2x)e^{-10x}$)

d) $2y'' + y' - y = 0, \quad y(4) = e^2 - e^{-4} \approx 7{,}371, \quad y'(4) = \frac{1}{2}e^2 + e^{-4} \approx 3{,}713$

(R: $y = e^{0,5x} - e^{-x}$)

14. Resolva os seguintes problemas de valor fronteira:

a) $y'' - 16y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y(\frac{1}{4}) = 5e$ (R: $y = 5e^{4x}$)

b) $y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = -1, \quad y(\frac{1}{2}) = e - 2$ (R: $y = e^{2x} - 2$)

c) $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y(\frac{1}{2}\pi) = 0$ (R: $y = -3e^x \cos x$)

<u>Euler-Cauchy</u>

15. As equações de Euler-Cauchy ocorrem em certas aplicações. Vejamos um exemplo da electroestática: Encontre o potencial electroestático $v = v(r)$ entre duas esferas concêntricas de raios r_1=4 cm e r_2=8 cm mantidas a potenciais v_1=110 volts e v_2=0, respectivamente.

Informação física: $v(r)$ é uma solução de $rv'' + 2v' = 0$, onde $v' = dv/dr$

(R: $v(r) = -110 + 880/r$ volts)

16. Verifique directamente, por substituição, que $y_2 = x^m \ln x$ é uma solução de $x^2 y'' + axy' + by = 0$ se $m^2 + (a-1)m + b = 0$ tiver uma raíz dupla, mas $x^{m_1}\ln x$ e

$x^{m_2}\ln x$ não são soluções de $x^2y''+axy'+by=0$ se as raízes m_1 e m_2 de $m^2+(a-1)m+b=0$ forem diferentes.

17. Encontre uma solução geral para as seguintes equações diferenciais:

a) $xy''+4y'=0$ (R: $y=c_1+c_2x^{-3}$)

b) $(x^2D^2+9xD+16)y=0$ (R: $y=(c_1+c_2\ln x)x^{-4}$)

c) $(x^2D^2+3xD+1)y=0$ (R: $y=(c_1+c_2\ln x)/x$)

d) $x^2y''+6{,}2xy'+6{,}76y=0$ (R: $y=(c_1+c_2\ln x)x^{-2,6}$)

e) $(x^2D^2+xD+1)y=0$ (R: $y=A\cos(\ln x)+B\sin(\ln x)$)

f) $(4x^2D^2+8xD-15)y=0$ (R: $y=c_1x^{1,5}+c_2x^{-2,5}$)

18. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $(4x^2D^2+4xD-1)y=0,\quad y(4)=2,\quad y'(4)=-0{,}25$ (R: $y=4/\sqrt{x}$)

b) $\mathbf{(}x^2D^2-xD+2\mathbf{)}y=0, y(1)=-1, y'(1)=-1$ (R: $y=-x\cos(\ln x)$)

c) $(x^2D^2+xD-0{,}01)y=0,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=0{,}1$ (R: $y=x^{0,1}$)

19. Resolva $(z-2)^2y''+5(z-2)y'+3y=0$ (R: $y=c_1(z-2)^{-3}+c_2(z-2)^{-1}$)

<u>independência linear, wronskiano</u>

20. Mostre que $y=(c_1+c_2x)e^x$ é uma solução geral de $y''-2y'+y=0$ em qualquer intervalo.

21. Encontre o wronskiano das seguintes bases:

a) $e^{\lambda_1x},\quad e^{\lambda_2x},\quad \lambda_1\neq\lambda_2$ (R: $W(e^{\lambda_1x},\quad e^{\lambda_2x})=(\lambda_2-\lambda_1)e^{\lambda_1x+\lambda_2x}$)

b) $e^{-\alpha x/2}\cos\omega x,\quad e^{-\alpha x/2}\sin\omega x$ (R: $W(e^{-\alpha x/2}\cos\omega x,\quad {}^{-\alpha x/2}\sin\omega x)=e^{-\alpha x}\omega$)

c) $x^\mu\cos(\nu\ln x),\quad x^\mu\sin(\nu\ln x)$ (R: $W(x^\mu\cos(\nu\ln x),\quad x^\mu\sin(\nu\ln x))=\nu x^{2\mu-1}$)

22. Encontre uma equação diferencial linear homogénea de segunda ordem para a qual as funções dadas são soluções. Encontre o wronskiano.

a) $e^x,\quad xe^x$ (R: $y''-2y'+y=0,\quad W(e^x,\quad xe^x)=e^{2x}$)

b) $e^x\cos x,\quad e^x\sin x$ (R: $y''-2y'+2y=0,\quad W(e^x\cos x,\quad e^x\sin x)=e^{2x}$

c) $\cos\pi x,\quad \sin\pi x$ (R: $y''+\pi^2y=0,\quad W(\cos\pi x,\quad \sin\pi x)=\pi$)

d) $1, \quad x^3$ (R: $x^2 y'' - 2xy' = 0, \quad W(1, \quad x^3) = 3x^2$)

e) $x^{1/2}, \quad x^{3/2}$ (R: $x^2 y'' - xy' + \frac{3}{4} y = 0, \quad W(x^{1/2}, \quad x^{3/2}) = x$)

<u>redução de ordem</u>

23. Mostre que a função dada y_1 é uma solução da equação dada. Usando o método de redução de ordem, encontre y_2 tal que y_1, y_2 formem uma base. Atenção! Escreva primeira a equação na forma padrão.

a) $(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0, \quad y_1 = x+1$ (R: $y_2 = x^2 + x$)

b) $(1-x)^2 y'' + 4(1-x)y' + 2y = 0, \quad y_1 = (1-x)^{-1}, \quad x \neq 1$ (R: $y_2 = (1-x)^{-2}$)

c) $xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y_1 = x^{-1} \sin x, \quad x \neq 0$ (R: $y_2 = -x^{-1} \cos x$)

<u>equações não homogéneas</u>

24. Verifique em cada caso que $y_p(x)$ é uma solução da equação diferencial dada e encontre uma solução geral:

a) $y'' - y = 3e^{2x}, \quad y_p = e^{2x}$ (R: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{2x}$)

b) $y'' + y = -3\sin 2x, \quad y_p = \sin 2x$ (R: $y = A\cos x + B\sin x + \sin 2x$)

c) $(D^2 + 3D - 4)y = 5e^x, \quad y_p = xe^x$ (R: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} + xe^x$)

d) $(x^2 D^2 - 2xD + 2)y = 5x^3 \cos x, \quad y_p = -5x\cos x$

(R: $y = c_1 x + c_2 x^2 - 5x\cos x$)

e) $(4x^2 D^2 + 1)y = (1-x^2)\cos 0{,}5x, \quad y_p = \cos 0{,}5x$

(R: $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{1/2} + \cos 0{,}5x$)

25. Verifique que y_p é uma solução da equação dada e resolva o problema de valor inicial dado:

a) $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y_p = x^2 e^{3x}$ (R: $y = (x + x^2)e^{3x}$)

b) $y'' + 4y = -12\sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, \quad y_p = 3x\cos 2x$

(R: $y = (1+3x)\cos 2x$)

<u>coeficientes indeterminados</u>

26. Resolva $y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \sin 2x$

(R: $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2e^x - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x$)

27. Encontre uma solução geral para as seguintes equações diferenciais:

a) $y'' + y = 3x^2$ (R: $y = A\cos x + B\sin x + 3x^2 - 6$)

b) $y'' + 6y' + 9y = 18\cos 3x$ (R: $y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} + \sin 3x$)

c) $y'' - y' - 2y = e^x + x$ (R: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$)

d) $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 + 4x + 2$ (R: $y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + x^2$)

e) $(D^2 - 4D + 3)y = 2\sin x - 4\cos x$ (R: $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \sin x$)

f) $(D^2 - 2D + 1)y = 2e^x$ (R: $y = (c_1 + c_2 x)e^x + e^x x^2$)

g) $(D^2 + 9)y = \cos 3x$ (R: $y = A\cos 3x + B\sin 3x + \frac{1}{6}x\sin 3x$)

h) $(D^2 - 4)y = 2\sinh 2x + x$ (R: $y = (c_1 + \frac{1}{4}x)e^{2x} + (c_2 + \frac{1}{4}x)e^{-2x} - \frac{1}{4}x$)

28. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2$ (R: $y = e^{-x} - e^{2x} + xe^{2x}$)

b) $y'' + y' - 2y = 14 + 2x - 2x^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(R: $y = 4e^x + 2e^{-2x} + x^2 - 6$)

c) $y'' - y' - 2y = 10\sin x, \quad y(\frac{1}{2}\pi) = -3, \quad y'(\frac{1}{2}\pi) = -1$ (R: $y = \cos x - 3\sin x$)

d) $y'' + y' - 2y = -6\sin 2x - 18\cos 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$

(R: $y = 3\cos 2x - e^{-2x}$)

29. O método dos coeficientes indeterminados pode também ser aplicado a algumas equações diferenciais lineares de primeira ordem, sendo por vezes mais simples que o método usual. Resolva:

a) $y' + 2y = \cos 2x$ (R: $y = c_1 e^{-2x} + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$)

b) $y' - y = x^5$ (R: $y = c_1 e^x - x^5 - 5x^4 - 20x^3 - 60x^2 - 120x - 120$)

variação de parâmetros

30. Encontre uma solução geral para as seguintes equações:

a) $y'' - 2y' + y = x^{3/2} e^x$ (R: $(c_1 + c_2 x + \frac{4}{35} x^{7/2}) e^x$)

b) $y'' - 2y' + y = 12e^x / x^3$ (R: $y = (c_1 + c_2 x + 6/x) e^x$)

c) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} / x^2$ (R: $y = (c_1 + c_2 x - \ln|x| - 1) e^{-2x}$)

d) $y'' - 2y' + y = 35x^{3/2} e^x + x^2$ (R: $y = (c_1 + c_2 x + 4x^{7/2}) e^x + x^2 + 4x + 6$)

e) $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$ (R: $y = (c_1 + c_2 x - \sin x) e^x$)

f) $(D^2 - 4D + 4) y = 6x^{-4} e^{2x}$ (R: $(c_1 + c_2 x + x^{-2}) e^{2x}$)

g) $(D^2 - 2D + 1) y = e^x / x^3$ (R: $y = ((c_1 + c_2 x + (2x)^{-1}) e^x$)

h) $(x^2 D^2 - 4xD + 6) y = 42 / x^4$ (R: $y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + x^{-4}$)

i) $(x^2 D^2 - 2xD + 2) y = 5x^3 \cos x$ (R: $y = c_1 x + c_2 x^2 - 5x \cos x$)

j) $(xD^2 - D) y = x^2 e^x$ (R: $y = c_1 + c_2 x^2 + (x - 1) e^x$)

k) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 24 / x^2$ (R: $y = c_1 x + c_2 x^2 + 2x^{-2}$)

l) $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 1 / x^4$ (R: $y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + \frac{1}{42} x^{-4}$)

31. Sempre que o método dos coeficientes indeterminados é aplicável, deve ser usado porque é mais simples do que este. Resolva a seguinte equação diferencial pelos dois métodos: $y'' + 4y' + 3y = 65 \cos 2x$ (R: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + 8 \sin 2x - \cos 2x$)

ANÁLISE MATEMÁTICA III

Universidade Fernando Pessoa

Faculdade de Ciência e Tecnologia

Capítulo III - Equações Diferenciais Lineares de Ordem Superior

EXERCÍCIOS

1. Mostre que as funções dadas formam uma base de soluções das equações diferenciais dadas num intervalo aberto, verificando a independência linear pelo teorema da dependência e independência linear de soluções.

   a) $1, \quad x^2, \quad x^4; \quad x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$ (R: $W(1, \quad x^2, \quad x^4) = 16x^3$, L.I.)

   b) $e^{-x}, \quad xe^{-x}, \quad x^3e^{-x}, \quad x^2e^{-x}; \quad (D^4 + 4D^3 + 6D^2 + 4D + 1)y = 0$

   (R: $W(e^{-x}, \quad xe^{-x}, \quad x^3e^{-x}, \quad x^2e^{-x}) = -12e^{-4x}$, L.I.)

   c) $\cos x, \quad \sin x, \quad e^{-x}; \quad (D^3 + D^2 + D + 1)y = 0$

   (R: $W(\cos x, \sin x, e^{-x}) = 2e^{-x}$, L.I.)

   d) $e^x \cos x, \quad e^x \sin x, \quad e^{-x} \cos x, \quad e^{-x} \sin x; \quad (D^4 + 4)y = 0$

   (R: $W(e^x \cos x, \quad e^x \sin x, \quad e^{-x} \cos x, \quad e^{-x} \sin x) = -32\cos 2x$, L.I.)

   e) $\cosh x, \quad \sinh x, \quad \cos x, \quad \sin x; \quad y^{IV} - y = 0$

   (R: $W(\cosh x, \quad \sinh x, \quad \cos x, \quad \sin x) = 2$, L.I.)

2. Verifique que as funções dadas são soluções da equação diferencial dada. Demonstre a sua independência linear pelo teorema referido na questão anterior. Resolva o problema da valor inicial dado.

   a) $y^{IV} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -48 \quad ; \quad 1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3$

   (R: $W(1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3) = 12$, L.I., $y = 6x - 8x^3$)

   b) $xy''' + 3y'' = 0, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = -8, \quad y''(1) = 10; \quad 1, \quad x, \quad x^{-1}$

   (R: $W(1, \quad x, \quad x^{-1}) = 2x^{-3}$, L.I., $y = 2 - 3x + 5x^{-1}$)

3. Diga se as seguintes funções são linearmente dependentes ou independentes no eixo positivo dos x:

a) $1, \quad x, \quad x^2$ (R: $W(1, \quad x, \quad x^2) = 2$, L.I.)

b) $(x-1)^2, \quad (x+1)^2, \quad x$ (R: $W((x-1)^2, \quad (x+1)^2, \quad x) = 0$, L.D.)

c) $\sin x, \quad \sin 2x, \quad \sin 3x$
(R: $W(\sin x, \sin 2x, \sin 3x) =$
$= -16\sin x \cos 2x \sin 3x + 9\sin x \sin 2x \cos 3x + 5\cos x \sin 2x \sin 3x$, L.I.)

d) $x, \quad \frac{1}{x}, \quad 1$ (R: $W(x, \quad \frac{1}{x}, \quad 1) = 2/x^3$, L.I.)

e) $\cos^2 x, \quad \sin^2 x, \quad \cos 2x$ (R: $W(\cos^2 x, \quad \sin^2 x, \quad \cos 2x) = 0$)

<u>equações homogéneas de n-ésima ordem c/ coeficientes constantes</u>

4. Encontre uma equação $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$ para a qual as funções dadas formam uma base:

a) $e^x, \quad e^{2x}, \quad e^{3x}$ (R: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$)

b) $e^x, \quad xe^x, \quad x^2e^x$ (R: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$)

c) $e^{-x}, \quad xe^{-x}, \quad e^x, \quad xe^x$ (R: $y^{IV} - 2y'' + y = 0$)

d) $1, \quad x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x$ (R: $y^{IV} + 4y'' = 0$)

5. Encontre uma solução geral das seguintes equações diferenciais:

a) $y''' - y' = 0$ (R: $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x$)

b) $y''' - y'' - y' + y = 0$ (R: $y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-x}$)

c) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ (R: $y = (A + Cx)\cos x + (B + Dx)\sin x$)

d) $y^{IV} - 81y = 0$ (R: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + A\cos 3x + B\sin 3x$)

6. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y''' = 0, \quad y(2) = 12, \quad y'(2) = 16, \quad y''(2) = 8$ (R: $y = 4x^2 - 4$)

b) $y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$ (R: $y = (2 - x)e^x$)

c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 3$ (R: $y = 3\cosh x$)

7. A redução de ordem aplica-se desde equações de segunda ordem até equações de ordem superior. É particularmente simples no caso de coeficientes constantes, uma vez que temos simplesmente que dividir a equação característica por $\lambda - \lambda_1$, onde $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ é uma solução conhecida. Reduza e resolva as seguintes equações, usando a função y_1 dada:

a) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y_1 = e^x$ (R: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}$)

b) $y''' - 2y'' - 7{,}25y' - 3y = 0, \quad y_1 = e^{4x}$ (R: $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x/2} + c_3 e^{-3x/2}$)

8. Resolva as equações de Euler-Cauchy:

a) $x^3 y''' + 2x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$ (R: $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-2}$)

b) $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$ (R: $y = c_1 x + c_2 x^{-1} + c_3 x^{-2}$)

9. A equação de Euler-Cauchy de terceira ordem é $x^3 y''' + ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$. Generalizando o método já estudado, mostre que $y = x^m$ é uma solução da equação se e somente se m é uma raíz da equação auxiliar $m^3 + (a-3)m^2 + (b-a+2)m + c = 0$.

coeficientes indeterminados

10. Encontre uma solução geral para as seguintes equações diferenciais:

a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 12e^{2x}$ (R: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} + e^{2x}$)

b) $y''' - y' = 10\cos 2x$ (R: $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x - \sin 2x$)

c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 12e^x$ (R: $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^x + 2x^3 e^x$)

d) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 16e^x + x + 3$ (R: $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{-x} + 2e^x + x$)

11. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 10\cos x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

(R: $y = \cosh x + \cos x$)

b) $y''' + y'' - 2y = 2x^2 + 2x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -4$

(R: $y = e^{-x}\sin x - x^2 - x - 1$)

c) $y^{IV} + 10y'' + 9y = 2\sinh x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4{,}1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -27{,}9$

(R: $y = \sin x + \sin 3x + 0{,}1\sinh x$)

variação de parâmetros

12. Encontre uma solução geral para as seguintes equações diferenciais:

a) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^{1/2} e^x$ (R: $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \frac{8}{105} x^{7/2})e^x$)

b) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{2x}\sin x$ (R: $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + \frac{1}{2} e^{2x}\cos x$)

c) $y''' + y' = \sec x$

(R: $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \sin x \ln|\cos x|$)

d) $xy''' + 3y'' = e^x$ (R: $y = c_1 x^{-1} + c_2 + c_3 x + x^{-1}e^x$)

e) $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^{-2}$ (R: $y = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x^2 - \dfrac{1}{12}x^{-2}$)

ANÁLISE MATEMÁTICA III

Universidade Fernando Pessoa

Faculdade de Ciência e Tecnologia

Capítulo IV - Transformadas de Laplace

EXERCÍCIOS

1. Encontre as transformadas de Laplace das seguintes funções (a, b, T, ω e θ são constantes):

a) $3t+4$ (R: $F(s)=\dfrac{3}{s^2}+\dfrac{4}{s}$)

b) t^2+at+b (R: $F(s)=\dfrac{2}{s^3}+\dfrac{a}{s^2}+\dfrac{b}{s}$)

c) $\cos(\omega t+\theta)$ (R: $F(s)=(s\cos\theta-\omega\sin\theta)/(s^2+\omega^2)$)

d) $\sin(2n\pi t/T)$ (R: $F(s)=2n\pi\left[T\left(s^2+\left(\dfrac{2n\pi}{T}\right)^2\right)\right]^{-1}$)

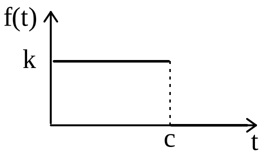
e) $\cos^2\omega t$ (R: $F(s)=\dfrac{1}{2s}+s/(2s^2+8\omega^2)$)

f) $\cos^2 t$ (R: $F(s)=\dfrac{1}{2s}+s/(2s^2+8)$)

g) e^{at+b} (R: $F(s)=\dfrac{e^b}{s-a}$)

h) $\sinh^2 2t$ (R: $F(s)=\dfrac{1}{2}\left[s/(s^2-16)-1/s\right]$)

i)



(R: $F(s)=k(1-e^{-cs})/s$)

2. Encontre $f(t)$ se $F(s)=L(f)$ é como se segue (a, b, etc, são constantes):

a) $\dfrac{5}{s+3}$ (R: $L^{-1}(F)=5e^{-3t}$)

b) $\dfrac{1}{s^2+25}$ (R: $L^{-1}(F)=\dfrac{1}{5}\sin 5t$)

c) $\dfrac{1}{s^4}$ (R: $L^{-1}(F)=t^3/6$)

d) $\dfrac{1}{s(s+1)}$ (R: $L^{-1}(F)=1-e^{-t}$)

e) $\dfrac{9}{s^2+3s}$ (R: $L^{-1}(F)=3-3e^{-3t}$)

f) $\dfrac{2}{s}+\dfrac{1}{s+2}$ (R: $L^{-1}(F)=2+e^{-2t}$)

<u>transformadas de derivadas e integrais</u>

3. Seja $f(t)=\sin^2 t$. Encontre $L(f)$ (R: $L(\sin^2 t)=\dfrac{2}{s(s^2+4)}$)

4. Utilizando $L(f')=sL(f)-f(0)$ ou $L(f'')=s^2L(f)-sf(0)-f'(0)$, encontre a transformada $L(f)$ da função dada $f(t)$:

a) $\cos^2 t$ (R: $L(\cos^2 t)=(s^2+2)/\left[s(s^2+4)\right]$)

b) te^{at} (R: $L(te^{at})=(s-a)^{-2}$)

c) $\cosh^2 2t$ (R: $L(\cosh^2 2t)=(s^2-8)/\left[s(s^2-16)\right]$)

d) $\cos^2 3t$ (R: $L(\cos^2 3t)=(s^2+18)/\left[s(s^2+36)\right]$)

5. Utilizando os dois primeiros Teoremas referentes a *Transformadas de Derivadas e Integrais*, deduza as seguintes transformadas que ocorrem em aplicaçıes (relacionadas com ressonância, etc):

a) $L(t\cos\omega t)=\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

b) $L(t\cosh at)=\dfrac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$

6. Usando a fórmula $L(t\cos\omega t)=\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$, mostre que:

a) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right)=\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$

b) $L^{-1}\left(\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right)=\dfrac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)$

7. Aplicando o teorema que vimos em *Transformada de Laplace do integral de uma função*, encontre $f(t)$ se $L(f)$ for igual a:

a) $\dfrac{3}{s^2+s}$ (R: $f(t)=3-3e^{-t}$)

b) $\dfrac{4}{s^3+4s}$ (R: $f(t)=1-\cos 2t$)

c) $\dfrac{8}{s^4-4s^2}$ (R: $f(t)=\sinh 2t-2t$)

d) $\dfrac{1}{s^4-2s^3}$ (R: $f(t)=(e^{2t}-1-2t-2t^2)/8$)

e) $\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{s+1}{s^2+1}\right)$ (R: $f(t)=1+t-\cos t-\sin t$)

8. Usando transformadas de Laplace, resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y''+4y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=-8$ (R: $y(t)=2\cos 2t-4\sin 2t$)

b) $y''+\omega^2 y=0,\quad y(0)=A,\quad y'(0)=B\quad (\omega\ real\neq 0)$

(R: $y(t)=A\cos\omega t+\dfrac{B}{\omega}\sin\omega t$)

c) $y''+5y'+6y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$ (R: $y(t)=e^{-2t}-e^{-3t}$)

d) $y''+25y=t,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0{,}04$ (R: $y(t)=\cos 5t+\dfrac{1}{25}t$)

e) $y''+ky'-2k^2y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=2k$ (R: $y(t)=2e^{kt}$)

<u>Desvio s, Desvio t, função escalão unitário</u>

9. Encontre a anti-transformada de Laplace $f(t)$ de

$F(s)=\dfrac{2}{s^2}-\dfrac{2e^{-2s}}{s^2}-\dfrac{4e^{-2s}}{s}+\dfrac{se^{-\pi s}}{s^2+1}$. (R: $f(t)=\begin{cases}2t & \text{se } 0<t<2\\ 0 & \text{se } 2<t<\pi\\ -\cos t & \text{se } t>\pi\end{cases}$)

10. Encontre a transformada de Laplace das seguintes funções:

a) $4{,}5te^{3{,}5t}$ (R: $L(4{,}5te^{3{,}5t})=4{,}5/(s-3{,}5)^2$)

b) $e^t\sin t$ (R: $L(e^t\sin t)=\dfrac{1}{s^2-2s+2}$)

c) $e^{-t}\sin(\omega t+\theta)$

(R: $L(e^{-t}\sin(\omega t+\theta)=(\omega\cos\theta+(s+1)\sin\theta)/\left[(s+1)^2+\omega^2\right]$)

d) $2t^3e^{-t/2}$ (R: $L(2t^3e^{-t/2})=12/(s+\frac{1}{2})^4$)

e) $e^{-\alpha t}(A\cos\beta t+B\sin\beta t)$

(R: $L(e^{-\alpha t}(A\cos\beta t+B\sin\beta t))=\left[A(s+\alpha)+B\beta\right]/\left[(s+\alpha)^2+\beta^2\right]$)

11. Encontre $f(t)$ se $L(f)$ é igual a:

a) $\dfrac{\pi}{(s+\pi)^2}$ (R: $f(t)=\pi te^{-\pi t}$)

b) $\dfrac{s-2}{s^2-4s+5}$ (R: $f(t)=e^{2t}\cos t$)

c) $\dfrac{s}{(s+3)^2+1}$ (R: $f(t)=e^{-3t}(\cos t-3\sin t)$)

d) $\dfrac{6}{s^2-4s-5}$ (R: $f(t)=2e^{2t}\sinh 3t$)

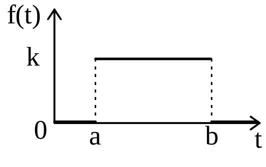
12. Representando as funções hiperbólicas em termos de funções exponenciais e aplicando o primeiro teorema do desvio, mostre que:

a) $L(\cosh at\cos at)=\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$

b) $L(\sinh at\cos at)=\dfrac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$

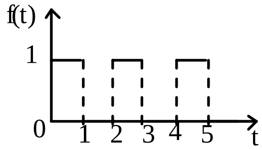
13. Represente as seguintes funções em termos de funções escalão unitário e encontre as suas transformadas de Laplace:

a)



(R: $k(e^{-as}-e^{-bs})/s$)

b)



(R: $u(t)-u(t-1)+u(t-2)-+\ldots,\quad s^{-1}(1-e^{-s}+e^{-2s}-+\ldots)=s^{-1}(1+e^{-s})^{-1}$)

14. Esboçe as seguintes funções e encontre as suas transformadas de Laplace:

a) $(t-1)u(t-1)$ (R: $L\{(t-1)u(t-1)\} = \frac{e^{-s}}{s^2}$)

b) $(t-1)^2 u(t-1)$ (R: $L\{(t-1)^2 u(t-1)\} = \frac{2e^{-s}}{s^3}$)

c) $e^t u(t-\frac{1}{2})$ (R: $L\left\{e^t u(t-\frac{1}{2})\right\} = e^{1/2} e^{-s/2} / (s-1)$)

d) $u(t-\pi)\cos t$ (R: $L\{u(t-\pi)\cos t\} = -se^{-\pi s} / (s^2+1)$)

15. Em cada caso esboçe a função dada, que se assume ser zero fora do intervalo dado, e encontre a sua transformada de Laplace:

a) $t \quad (0 < t < 1)$ (R: $L = s^{-2} - s^{-2}e^{-s} - s^{-1}e^{-s}$)

b) $e^t \quad (0 < t < 1)$ (R: $L = (1-e^{1-s})/(s-1)$)

c) $t \quad (0 < t < a)$ (R: $L = s^{-2} - e^{-as}(s^{-2} + as^{-1})$)

d) $2\cos \pi t \quad (1 < t < 2)$ (R: $L = \frac{-2s(e^{-s}+e^{-2s})}{s^2+\pi^2}$)

16. Encontre e esboçe as anti-transformadas de Laplace das seguintes funções:

a) e^{-3s}/s^2 (R: $L^{-1}(e^{-3s}/s^2) = (t-3)u(t-3)$)

b) $3(e^{-4s} - e^{-s})/s$ (R: $L^{-1}(3(e^{-4s}-e^{-s})/s) = 3u(t-4) - 3u(t-1)$)

c) $se^{-\pi s}/(s^2+4)$ (R: $L^{-1}(se^{-\pi s}/(s^2+4)) = \cos(2t-\pi)u(t-\pi)$)

d) e^{-s}/s^4 (R: $L^{-1}(e^{-s}/s^4) = \frac{(t-1)^3}{6}u(t-1)$)

17. Utilizando transformadas de Laplace, resolva:

a) $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ (R: $y(t) = e^{-t}\sin t$)

b) $4y'' - 4y' + 37y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1{,}5$ (R: $y(t) = 3e^{0{,}5t}\cos 3t$)

c) $y'' + 6y' + 8y = -e^{-3t} + 3e^{-5t}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -14$

(R: $y(t) = e^{-2t} + e^{-3t} + e^{-4t} + e^{-5t}$)