Faculdade de Ciências da Saúde
Universidade Fernando Pessoa

Apontamentos de Biomatemática

Capítulo de Equações Diferenciais Ordinárias

Licenciatura em
Análises Clínicas e Saúde Pública

Maria Alzira Dinis

UFP/FCS – 2005/06

ÍNDICE

4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS (EDO)

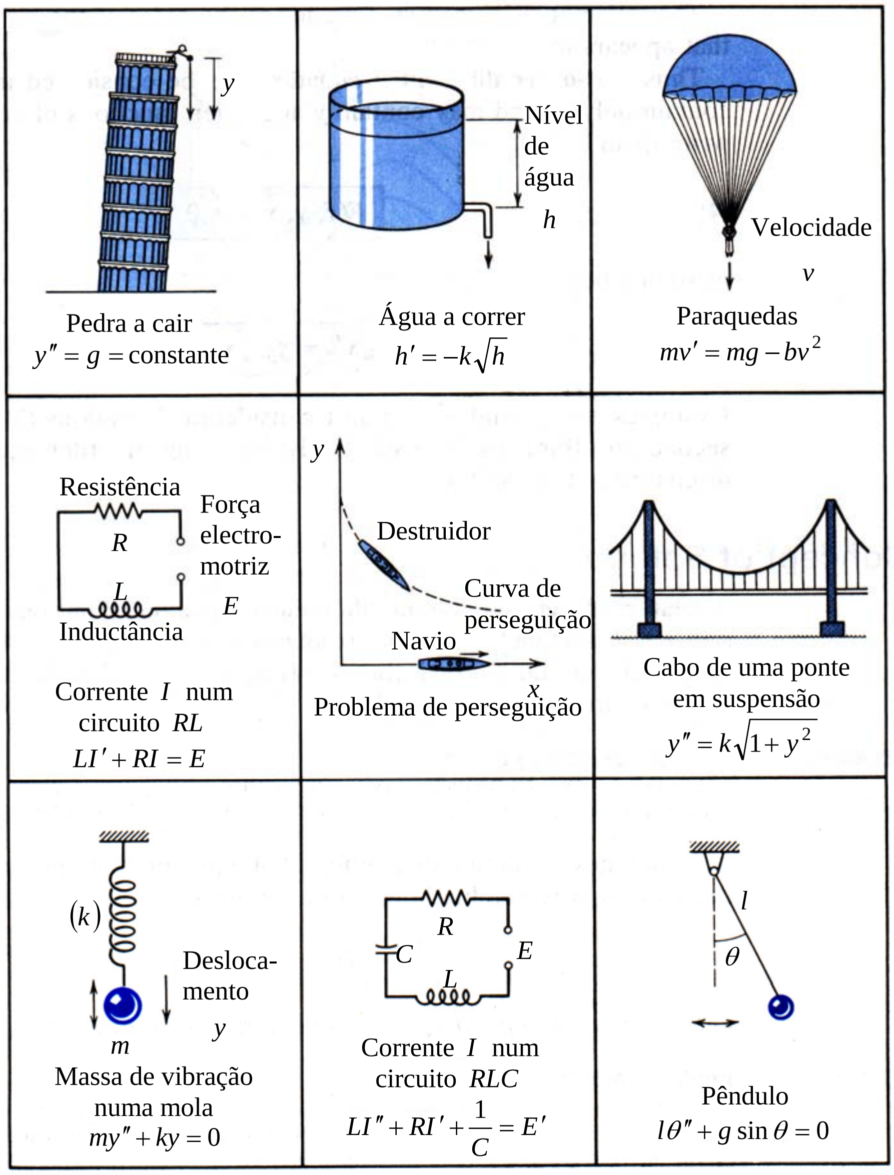
Uma equação diferencial ordinária é uma equação que contém uma ou várias derivadas de uma função desconhecida, a que chamamos $y(x)$ e que queremos determinar a partir da equação; a equação pode também conter a própria função y bem como funções e constantes dadas.

Exemplo 4.1:

$y' = \cos x$; $y'' + 4y = 0$ e $x^2 y''' y' + 2e^x y'' = (x^2 + 2)y^2$ são exemplos de equações diferenciais ordinárias.

A palavra *ordinária* distingue estas equações das *equações diferenciais parciais*, nas quais a função desconhecida depende apenas de duas ou mais variáveis. As equações diferenciais aparecem em muitas aplicações de Engenharia e também em aplicações de sistemas físicos e outros, envolvendo modelos matemáticos. Um exemplo simples pode ser resolvido recorrendo a conhecimentos adquiridos em *Análise Matemática*. Por exemplo, se uma população – de humanos, animais, bactérias, etc – cresce a uma taxa $y' = dy/dx$ (x = tempo) igual à população $y(x)$ presente, o modelo populacional é $y' = y$, que é uma equação diferencial. Se nos lembrarmos da *Análise* que $y = e^x$ (ou mais geralmente $y = ce^x$) tem a propriedade $y' = y$, obtivemos uma solução do nosso problema.

Como outro exemplo, se deixarmos cair uma pedra, então a sua aceleração $y'' = d^2y/dx^2$ (x = tempo, como antes) é igual à aceleração da gravidade g (uma constante). Assim, o modelo deste problema de *queda livre* é $y'' = g$, com boa aproximação, uma vez que a resistência do ar não tem muito interesse neste caso. Por integração, obtemos a velocidade $y' = dy/dx = gx + v_0$, onde v_0 é a velocidade inicial com que o movimento foi iniciado (ex: $v_0 = 0$). Integrando novamente calcula-se a distância percorrida $y = \frac{1}{2}gx^2 + v_0 x + y_0$, onde y_0 é a distância a partir do ponto inicial (ex: $y_0 = 0$). Modelos mais complicados, como os que se indicam na figura que se segue, necessitam de métodos mais refinados para a sua resolução.



Comecemos por classificar as equações diferenciais de acordo com a sua *ordem*: A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação. Assim, as *equações diferenciais de primeira ordem* contêm apenas y' e podem conter y e funções de x; podemos então escrever $F(x, y, y') = 0$ ou por vezes $y' = f(x, y)$.

Exemplo 4.2:

$y' + x = 0$ é uma equação diferencial de 1ª ordem; $xy'' - 3xy' + y - x^2 = 0$ é uma equação diferencial de 2ª ordem; $(y''')^2 - 4y'' - 2y = 0$ é uma equação diferencial de 3ª ordem.

4.1. CONCEITO DE SOLUÇÃO

Uma solução de uma equação diferencial de primeira ordem num intervalo $a < x < b$ é uma função $y = h(x)$ que tem uma derivada $y' = h'(x)$ e satisfaz $F(x, y, y') = 0$ para todo o x pertencente ao intervalo; isto é, $F(x, y, y') = 0$ torna-se uma identidade se substituirmos a função desconhecida y por h e y' por h'.

<u>Exemplo 4.3</u>:

Verifique que $y = x^2$ é uma solução de $xy' = 2y$ para todo o x.

Resolução:

Na verdade, $y' = 2x$, e por substituição, $xy' = x(2x) = 2y = 2x^2$, uma identidade em x.

Por vezes uma solução de uma equação diferencial aparecerá como uma função implícita, isto é, implicitamente dada na forma $H(x, y) = 0$ e é chamada uma *solução implícita* em constraste com uma *solução explícita* $y = h(x)$.

<u>Exemplo 4.4</u>:

A função y de x implicitamente dada por $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ($y > 0$), representando um semicírculo de raio unitário no meio-plano superior, é uma solução implícita da equação diferencial $yy' = -x$ no intervalo $-1 < x < 1$. Prove-o.

Resolução:

Uma vez que y é definida implicitamente, temos que derivar implicitamente a função $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$. Então $yy' = y\left(-\frac{x}{y}\right) = -x$.

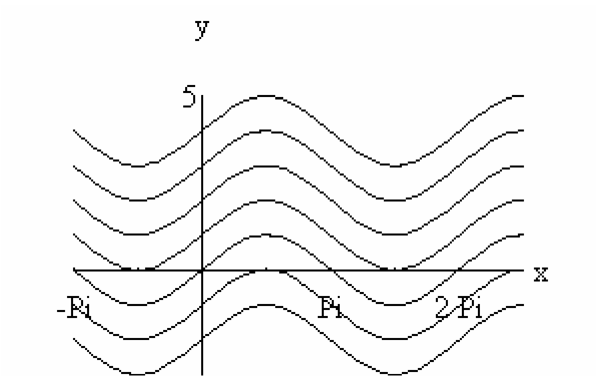
Veremos de seguida que uma equação diferencial pode ter - e em geral terá – muitas soluções. Este facto não é surpreendente se pensarmos que, dos conhecimentos que temos de *Análise Matemática*, a integração introduz constantes arbitrárias.

<u>Exemplo 4.5</u>:

A equação $y' = \cos x$ pode ser resolvida analiticamente. Da integração resultam curvas do seno $y = \sin x + c$ com c arbitrário. Cada c permite obter uma curva, e estas são todas as soluções possíveis que podemos obter analiticamente.

Resolução:

A figura seguinte mostra algumas das curvas possíveis de obter para $c = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.



Este exemplo, simples, é típico de muitas equações de primeira ordem. Ilustra que todas as soluções são representadas por uma única fórmula envolvendo uma constante arbitrária c. É usual chamar a tal função envolvendo uma constante arbitrária uma *solução geral* de uma equação diferencial de 1ª ordem. Se escolhermos um determinado valor para c (ex: c =2 ou 0 ou $-5/3$, etc) obtém-se uma *solução particular* da equação. Assim, $y = \sin x + c$ é uma solução geral de $y' = \cos x$, e $y = \sin x$, $y = \sin x - 2$, $y = \sin x + 0{,}75$, etc, são soluções particulares.

Uma equação diferencial pode por vezes ter uma solução adicional que não pode ser obtida da solução geral e é então chamada uma *solução singular*.

<u>Exemplo 4.6</u>:

Por exemplo, $y'^2 - xy' + y = 0$ tem a solução geral $y = cx - c^2$, como pode comprovar-se por diferenciação e substituição.

Resolução:

Se $c = 1 \Rightarrow y = cx - c^2 = x - 1$.

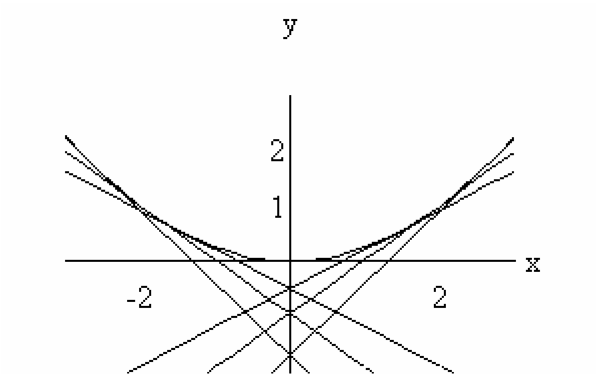
Então $y' = 1$ e $y'2 - xy' + y = 1^2 - x \times 1 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, Se $c = 2 \Rightarrow y =$ $= 2x - 2^2 = 2x - 4$. Então $y' = 2$ e $y'^2 - xy' + y = 2^2 - x \times 2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4 - 2x + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, etc.

$y = cx - c^2$ representa uma família de linhas rectas, uma linha para cada c. São estas as soluções particulares que se mostram na figura. A substituição mostra também que a parábola $y = x^2/4$ é também uma solução.

Vejamos: Se $y = x^2/4$ então $y' = \dfrac{x}{2}$ e

$$y'^2 - xy' + y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - x\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2_{(2)}} + + \frac{x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x^2 + x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow 0 = 0$$

Esta é uma solução singular de $y'^2 - xy' + y = 0$ porque não a podemos obter de $y = cx - c^2$ através de um c adequado.



As condições sob as quais uma determinada equação diferencial tem soluções são bastante gerais. Existem no entanto equações relativamente simples que não têm solução e outras que não têm uma solução geral.

<u>Exemplo 4.7</u>:

A equação $y'^2 = -1$ não tem solução para y real – não é possível derivar uma função real tal que da sua derivada ao quadrado resulte um número negativo. A equação $|y'| + |y| = 0$ não possui uma solução geral porque a sua única solução é $y \equiv 0$.

4.2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS SEPARÁVEIS

Muitas equações diferenciais de primeira ordem podem ser reduzidas à forma $g(y)y' = f(x)$ através de manipulações algébricas. Uma vez que $y' = dy/dx$, é conveniente escrever $g(y)dy = f(x)dx$, mantendo em mente que se trata apenas de um outro modo de escrita. Tal equação é chamada de *equação separável* ou equação de *variáveis separáveis*, porque as variáveis x e y são separadas de modo que x apareça apenas à direita e y aparece apenas à esquerda. Para resolver $g(y)y' = f(x)$ podemos integrar ambos os membros em relação a x, obtendo $\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx + c \Leftrightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx + c$. Se partirmos do princípio de que f e g são funções contínuas, os integrais existirão e através do seu cálculo obteremos a solução geral de $g(y)y' = f(x)$.

<u>Exemplo 4.8</u>:

Resolva a equação diferencial $9yy' + 4x = 0$.

Resolução:

Separando as variáveis obtém-se $9ydy = -4dx$.

Efectuando a integração em ambos os membros obtém-se a solução geral:

$$\int 9ydy = \int -4xdx \Leftrightarrow 9\frac{y^2}{2} = -4\frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + \bar{c}\ .$$

Assim, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c$ ($c = \frac{\bar{c}}{18}$). A solução representa uma família de elipses.

<u>Exemplo 4.9</u>:

Resolva a equação diferencial $y' = 1 + y^2$.

Resolução:

Separando as variáveis e por integração obtemos:

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx,\ \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \Leftrightarrow \arctan y = x + c \Leftrightarrow y = \tan(x+c).$$

<u>Exemplo 4.10</u>:

Resolva o seguinte problema de valor inicial (PVI) $y' + 5x^4 y^2 = 0, \quad y(0) = 1$.

Resolução:

Separando as variáveis e integrando, obtemos:

$$\frac{dy}{y^2} = -5x^4 dx\,, \qquad -\frac{1}{y} = -x^5 + c\,, \qquad y = \frac{1}{x^5 - c}\,.$$

Atendendo à condição inicial tem-se $y(0) = \frac{1}{-c} = 1 \Leftrightarrow c = -1$. Assim $y = \frac{1}{x^5 + 1}$.

<u>Exemplo 4.11</u>:

Resolva o problema de valor inicial $y' = ky, \quad y(0) = 2$.

Resolução:

Separando as variáveis e integrando:

$$\frac{dy}{y} = k\,,\ \ln|y| = kx + \bar{c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = e^{kx+\bar{c}} = e^{kx}e^{\bar{c}} = ce^{kx}\,.$$

Para $x = 0 \Rightarrow y = 2 = ce^{k \cdot =} = c \Rightarrow y = 2e^{kx}$.

4.3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXACTAS

Lembremo-nos de *Análise* que se uma função $u(x,y)$ tem derivadas parciais contínuas, o seu diferencial total ou exacto é $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Segue-se então que se $u(x,y) = c =$ constante, então $du = 0$. Vejamos um exemplo de uma função de duas variáveis: se $u = x + x^2 y^3 = c$, então $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \ = (1 + 2xy^3)dx + 3x^2 y^2 dy = 0$ ou $\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{1+2xy^3}{3x^2y^2}$ (com $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ derivadas parciais), é uma equação diferencial que pode ser resolvida se voltarmos para trás. Este conceito origina um poderoso método de resolução como veremos.

Uma equação diferencial de 1ª ordem da forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é chamada *exacta* se o lado esquerdo for o diferencial total ou exacto $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ de uma função $u(x,y)$. Então a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ pode ser escrita como $du = 0$. Por integração obtemos imediatamente a solução geral da equação diferencial na forma $u(x,y) = c$. Comparando $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ com $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$ vemos que a primeira é exacta se existir uma função $u(x,y)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = N$. Suponhamos que M e N são definidas e têm derivadas parciais contínuas numa região no plano xy cuja fronteira é uma curva fechada e não tem auto-intersecções. Sendo assim, se as funções são contínuas as segundas derivadas parciais: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ são iguais: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Esta condição é não somente necessária mas também suficiente para que $Mdx + Ndy$ seja um diferencial exacto. Se $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exacta, a função $u(x,y)$ pode ser encontrada por tentativas ou de uma forma sistemática. De $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ podemos integrar em ordem a x: $u = \int Mdx + k(y)$; nesta integração y é considerado constante e $k(y)$ desempenha o papel de uma constante de integração. Para determinar $k(y)$, deriva-se $\partial u/\partial y$ de $u = \int Mdx + k(y)$, utiliza-se $\frac{\partial u}{\partial y} = N$ para calcular dk/dy, e integra-se dk/dy para encontrar k. A fórmula $u = \int Mdx + k(y)$ foi obtida a partir de $\frac{\partial u}{\partial x} = M$. Em vez desta última, podemos igualmente utilizar $\frac{\partial u}{\partial y} = N$. Então obteremos $u = \int N dy + l(x)$. Para determinar $l(x)$ derivamos $\partial u / \partial x$ de $u = \int N dy + l(x)$, usamos $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ para calcular dl/dx e integramos.

Exemplo 4.12:

Resolva $(x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2 y + y^3)dy = 0$.

Resolução:

O 1º passo consiste em saber se se trata de uma equação diferencial exacta:

a equação é da forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ com $M = x^3 + 3xy^2$, $N = 3x^2 y + y^3$.

Assim $\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy$. Uma vez que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ então a equação diferencial é exacta.

O 2º passo consiste no seguinte:

de $u = \int M dx + k(y)$ obtemos $u = \int (x^3 + 3xy^2)dx + k(y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 y^2 + k(y)$.

Para encontrar $k(y)$ diferencia-se esta fórmula em ordem a y e utiliza-se a fórmula $\frac{\partial u}{\partial y} = N$.

Obtém-se $\frac{\partial u}{\partial y} = \; = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 y^2 + k(y)\right) = 3x^2 y + \frac{dk}{dy} = N = 3x^2 y + y^3$.

Então $\frac{dk}{dy} = 3x^2 y + y^3 - \quad - 3x^2 y = y^3 \Rightarrow k = \int \frac{dk}{dy} = \int y^3 = \frac{y^4}{4} + \bar{c}$. Tem-se assim, $u(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 y^2 + \; + k(y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 y^2 + \frac{y^4}{4} + \bar{c} \Rightarrow \frac{1}{4}(x^4 + 6x^2 y^2 + y^4) = c$.

O 3º passo consiste na verificação:

Note-se que este método nos dá a solução na forma implícita, $u(x,y) = c =$ constante e não na forma explícita, $y = f(x)$. Para a verificação podemos diferenciar $u(x,y) = c$ implicitamente e ver se nos conduz a $dy/dx = -M/N$ ou $Mdx + Ndy = 0$, a equação dada. No caso presente, diferenciando $u(x,y) = \frac{1}{4}(x^4 + 6x^2 y^2 + y^4) = c$ implicitamente em relação a x, obtemos: $u_x(x,y) = \frac{1}{4}(4x^3 + 12xy^2)$, $u_y(x,y) = \frac{1}{4}(12x^2 yy' + 4y^3 y')$.

Juntando os termos tem-se:

$\frac{1}{4}\left(4x^3+12xy^2+12x^2yy'+4y^3y'\right)=0 \Leftrightarrow x^3+3xy^2+y'\left(3x^2y+y^3\right)=0$, o que é igual a $M+Ny'=0$ com $M=x^3+3xy^2$ e $N=3x^2y+y^3$.

$$\text{Logo, } M+N\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Mdx+Ndy=0\,.$$

<u>Exemplo 4.13</u>:

Resolva a equação $ydx-xdy=0$.

Resolução:

Vemos que $M=y$, $N=-x$, então $\frac{\partial M}{\partial y}=1$ mas $\frac{\partial N}{\partial x}=-1$.

Como $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$, a equação não é exacta. Vamos mostrar que em tal caso, o método não funciona: $u=\int Mdx+k(y)=\int ydx+k(y)=xy+k(y)$.

Então $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(xy+k(y)\right)=x+k'(y)$ o que deveria ser igual a $N=-x$ o que é impossível pois $k(y)$ só depende de y. Teria que ser resolvida por outro dos métodos já discutidos.

4.4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Diz-se que uma equação diferencial de primeira ordem é *linear* se pode ser escrita na forma: $y' + p(x)y = r(x)$. O traço característico desta equação consiste no facto de ser linear em y e y', enquanto que p e r à direita podem ser quaisquer funções dadas de x. Se $r(x)$ for igual a zero para todo o x no intervalo no qual a equação é considerada, ($r(x) \equiv 0$), diz-se que a equação é *homogénea*, de outro modo diz-se *não homogénea*. Encontremos uma fórmula para a solução geral de $y' + p(x)y = r(x)$ num intervalo I, assumindo que p e r são contínuas em I. Para a equação homogénea $y' + p(x)y = 0$ isso é muito simples. Na verdade separando as variáveis tem-se $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$, assim $\ln|y| = -\int p(x)dx + c^*$ e retirando os expoentes em ambos os lados vem $y(x) = ce^{-\int p(x)dx}$ (com $c = \pm e^{c^*}$ quando $y \neq 0$). Se supusermos $c = 0$ obteremos a *solução trivial* $y \equiv 0$. Tratemos de resolver a equação não homogénea $y' + p(x)y = r(x)$. Acabamos por verificar que possui a propriedade de ter um factor integrante dependendo somente de x.

Primeiro escrevemos $y' + p(x)y = r(x)$ na forma $(py - r)dx + dy = 0$, ou seja, $Pdx + Qdy = 0$, onde $P = py - r$ e $Q = 1$. Então a equação $\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ fica simplesmente $\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = p(x)$.

Uma vez que só depende de x, a equação $y' + p(x)y = r(x)$ tem um factor integrante $F(x)$, que é obtido directamente por integração e exponenciação: $F(x) = e^{\int pdx}$ - como anteriormente para obter $F(x) = \exp\int R(x)dx$.

A multiplicação de $y' + p(x)y = r(x)$ por F dá $e^{\int pdx}(y' + py) = \left(e^{\int pdx}y\right)' = e^{\int pdx}r$.

Integremos agora em relação a x, $e^{\int pdx}y = \int e^{\int pdx}rdx + c$ e resolvamos em relação a y: $y(x) = e^{-h}\left[\int e^h rdx + c\right]$, com $h = \int p(x)dx$. Isto representa a solução geral de $y' + p(x)y = r(x)$ na forma de um integral. (A escolha da constante de integração em $\int pdx$ não interessa.)

<u>Exemplo 4.14</u>:

Resolva a equação diferencial linear $y' - y = e^{2x}$.

Resolução:

Aqui $p = -1$, $r = e^{2x}$, $h = \int p dx = \int - dx = -x$ e de $y(x) = e^{-h}\left[\int e^h r dx + c\right]$ obtemos a solução geral $y(x) = e^x \left[\int e^{-x} e^{2x} dx + c\right] = e^x\left[e^x + c\right] = ce^x + e^{2x}$.

Alternativamente podemos multiplicar a equação dada por $e^h = e^{-x}$, encontrando $(y' - y)e^{-x} = \left(ye^{-x}\right)' = e^{2x}e^{-x} = e^x$ e integrando em ambos os membros, obtendo o mesmo resultado que antes: $ye^{-x} = e^x + c \Rightarrow y = e^{2x} + ce^x$.

4.5. APLICAÇÕES

4.5.1. Modelação. Problemas de valor inicial

As experiências mostram que uma substância radioactiva se decompõe a uma taxa proporcional à quantidade presente. Começando com uma dada quantidade de substância, digamos, 2 gramas, num determinado momento, por exemplo $t=0$, o que pode ser dito quanto à quantidade disponível num momento mais tardio?

O *primeiro passo* consiste em estabelecer um *modelo matemático* – uma equação diferencial – do processo físico. Note-se por $y(t)$ a quantidade de substância ainda presente no instante t. A taxa de variação é dy/dt. De acordo com a lei física que rege o processo de radiação, dy/dt é proporcional a y: $\frac{dy}{dt}=ky$. Então y é a função desconhecida, que depende de t. A constante k é uma constante física definida cujo valor numérico é conhecido para diversas substâncias radioactivas. (No caso do rádio ${}_{88}\mathrm{Ra}^{226}$, por exemplo, tem-se $k \approx -1.4\times 10^{-11}$ s^{-1}.)

Uma vez que a quantidade de substância é positiva e diminui com o tempo, dy/dt é negativo, e portanto também k o é. Podemos verificar que o processo físico em consideração é descrito matematicamente por uma equação diferencial de 1ª ordem. Assim, esta equação é o modelo matemático deste processo físico. Sempre que uma lei física envolve uma taxa de variação de uma função, tal como velocidade, aceleração, etc., leva-nos a uma equação diferencial. Por este motivo as equações diferenciais são frequentemente encontradas na Física e na Engenharia.

O segundo passo consiste em resolver a equação diferencial. A equação $\frac{dy}{dt}=ky$ diz-nos que se existe uma solução $y(t)$, a sua derivada deve ser proporcional a y. De *Análise Matemática* sabemos que as funções exponenciais têm esta propriedade. Por diferenciação e substituição podemos ver que uma solução para todo o t é e^{kt} uma vez que $\left(e^{kt}\right)'=ke^{kt}$, ou mais geralmente, $y(t)=ce^{kt}$ com uma qualquer constante c porque $y'(t)=cke^{kt}=ky(t)$. Uma vez que c é arbitrária, $y(t)=ce^{kt}$ é uma *solução geral* de $\frac{dy}{dt}=ky$ por definição.

O *terceiro passo* consiste na determinação de uma solução particular para uma condição inicial. Uma vez que este processo se comporta de forma única e, sendo assim, a solução particular a obter deve ser única. A quantidade de substância num determinado momento t dependerá da quantidade inicial $y=2$ gramas no momento $t=0$, ou $y(0)=2$, a que chamamos *condição* *inicial* e é usada para encontrarmos c: $y(0)=ce^{k\cdot 0}=ce^{0}=2 \Leftrightarrow c=2$. Com $c=2$ temos a solução particular $y(t)=2e^{kt}$. Assim, a quantidade de substância radioactiva decresce exponencialmente com o tempo, o que está de acordo com as experiências.

O *último passo* consiste na verificação. Da última equação vem $\dfrac{dy}{dt}=2ke^{kt}=ky$ e $y(0)=2e^{0}=2$. Então, a função $y(t)=2e^{kt}$ satisfaz a equação $\dfrac{dy}{dt}=ky$ bem como a condição inicial $y(0)=2$. Este passo é extremamente importante porque nos mostra se a função é ou não solução do problema.

Uma equação diferencial com uma condição inicial, como no exemplo anterior, é chamada um *problema de valor inicial*. Com x como variável independente – em vez de t - tem a forma $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$ onde x_0 e y_0 são valores dados. (No exemplo anterior $x_0=t_0=0$ e $y_0=y(0)=2$.) A condição inicial $y(x_0)=y_0$ é utilizada para determinar um valor de c na solução geral.

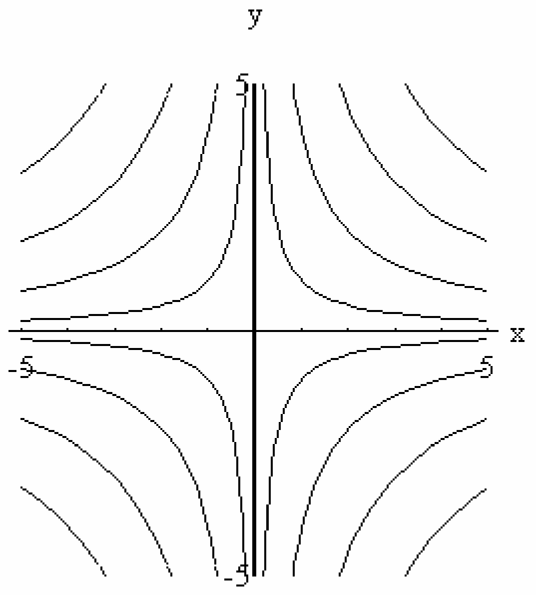
<u>Exemplo 4.15</u>:

Encontre a curva que passa pelo ponto $(1,1)$ no plano xy que tem em cada um dos seus pontos o declive $-y/x$.

Resolução:

A função que nos dá a curva desejada tem que ser uma solução da equação diferencial $y'=-\dfrac{y}{x}$.

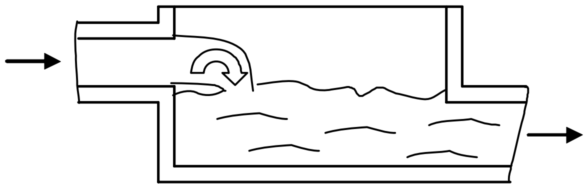
Veremos mais tarde como resolver tal equação. Entretanto podemos verificar que a solução geral de $y'=-\dfrac{y}{x}$ é $y=\dfrac{c}{x}$. Se esta for a solução então devemos ter $y=1$ quando $x=1$. Esta condição inicial $y(1)=1$ permite obter $c=1$ e como resposta a solução particular $y=1/x$.



4.5.2. Equações diferenciais lineares

<u>Exemplo 4.16</u>:

O tanque na figura contém 200 gal de água na qual estão dissolvidos 40 lb de sal. 5 gal de água salgada contendo 2 lb de sal dissolvido, entram no tanque por minuto e a mistura, mantida uniforme por agitação sai do tanque à mesma velocidade. Encontre a quantidade de sal $y(t)$ no tanque em qualquer momento t.



Resolução:

1º passo –

Modelação matemática: a taxa de alteração $y' = dy/dt$ de $y(t)$ iguala o fluído de entrada $5 \times 2 = 10$ (lb/min) de sal menos o fluído de saída.

O fluido de saída (lb/min) é $(5/200) \times y(t) = 0{,}025y(t)$ porque $y(t)$ é a quantidade total de sal no tanque e 5 gal/200 gal é a fracção de volume que sai por minuto. Alternativamente, $y(t)$ é a quantidade total de sal, então $y(t)/200$ é a quantidade de sal por galão, e 5 gal/min saem. Assim o modelo é $y' = 10 - 0{,}025y$, isto é, o problema de valor inicial: $y' + 0{,}025y = 10, \quad y(0) = 40$.

2º passo –

Resolução da equação:

em $y(x)=e^{-h}\left[\int e^{h}r dx+c\right]$ com t em vez de x, temos $p=0{,}025$, $h=0{,}025t$, $r=10$ e teremos a equação geral $y(t)=e^{-0{,}025t}\left[\int e^{0{,}025t}\cdot 10dt+c\right]=e^{-0{,}025t}\left[\dfrac{10}{0{,}025}e^{0{,}025t}+c\right]=ce^{-0{,}025t}+400$.

A condição inicial $y(0)=c+400=40$ origina $c=-360$ e como resposta a solução particular $y(t)=400-360e^{-0{,}025t}$ (lb).